1. Un balde de masa despreciable contiene inicialmente una masa de arena igual a M. El balde se encuentra sobre una superficie horizontal sin fricción y está unido a una pared mediante un cable que aplica una tensión constante T_0 en todo momento. A medida que el balde se desplaza horizontalmente hacia la pared, va perdiendo arena a una tasa constante con respecto a la posición:

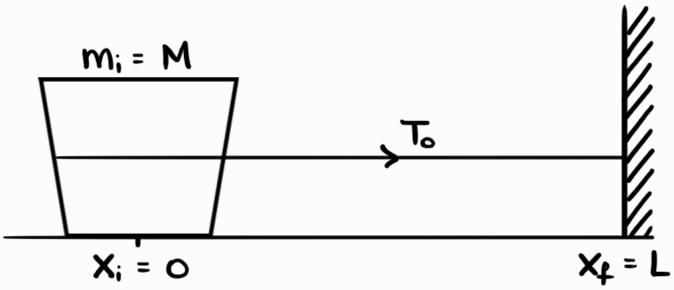
$$\frac{dm}{dx} = \frac{M}{L}$$

de modo que el balde queda completamente vacío al llegar a una distancia L desde su posición inicial hasta la pared.

a) Calcule la energía cinética de la arena dentro del balde en función de x. Determine su máximo.

b) Calcule la magnitud del momentum lineal p en función de x. Determine su máximo.

a) Se define el siguiente sistema de referencia:



Determinamos la masa en función de la posición con la información del enunciado, notando que como se pierde masa, ***dx* es positivo** mientras que ***dm* es negativo**:

$$\frac{dm}{dx} = -\frac{M}{L} \quad \rightarrow \quad m(x) = -\frac{M}{L}x + C$$

$$\begin{matrix} m(x=0) = M \\ m(x=L) = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad m(x) = M(1 - x/L)$$

Para este problema, encontrar directamente una expresión para la energía cinética en función de *x* resulta extremadamente complejo. Por esto, se trabajará usando el tiempo como variable hasta encontrar *x(t)* para finalmente resolver el problema. Se plantea la segunda Ley de Newton para este sistema de masa variable:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = T_0 \qquad / \int_0^t dt$$

$$(m\dot{x})\Big|_0^t = T_0 t$$

$$M(1 - x/L)\cdot\frac{dx}{dt} = T_0 t \qquad / \int_0^t dt$$

$$M\left(x - \frac{x^2}{2L}\right) = T_0\frac{t^2}{2}$$

$$x^2 - 2Lx + \underbrace{\left(\frac{T_0 L}{M}\right)}_{\alpha} t^2 = 0$$

$$x(t) = \frac{2L \pm \sqrt{4L^2 - 4\alpha t^2}}{2} = L \pm \sqrt{L^2 - \alpha t^2}$$

Como se debe cumplir *x(t=0)=0*, se tiene:

$$x(t) = L - \sqrt{L^2 - \alpha t^2} \quad \rightarrow \quad m(x) = M\left(1 - \frac{L - \sqrt{L^2 - \alpha t^2}}{L}\right) = \frac{M}{L}\sqrt{L^2 - \alpha t^2}$$

Luego la velocidad será:

$$\dot{x}(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{L^2 - \alpha t^2}}$$

Y así la energía cinética resulta:

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{L}\sqrt{L^2 - \alpha t^2} \cdot \frac{\alpha^2 t^2}{(\sqrt{L^2 - \alpha t^2})^2} = \frac{M\alpha^2 t^2}{2L\sqrt{L^2 - \alpha t^2}}$$

Mientras que su máximo valor es:

$$\frac{dK}{dt} \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{M\alpha^2}{2L}\left(\frac{2t\sqrt{L^2 - \alpha t^2} + t^2 \frac{\alpha t}{\sqrt{L^2 - \alpha t^2}}}{L^2 - \alpha t^2}\right) = 0$$

$$2tL^2 - 2\alpha t^3 + \alpha t^3 = 0$$

$$t^* = L\sqrt{\frac{2}{\alpha}}$$

Vemos si este instante ocurre antes o después de que el balde llega al muro:

$$x(t_f) = L - \sqrt{L^2 - \alpha t_f^2} \overset{!}{=} L \quad \rightarrow \quad t_f = L\sqrt{\frac{1}{\alpha}} < L\sqrt{\frac{2}{\alpha}} = t^*$$

Esto implica que el balde llega al muro antes de alcanzar el máximo global de la energía cinética. Notando que *K* es una función creciente cuando $t < t_f$, el máximo valor se alcanza en el último instante:

$$K_{max} = K(t = t_f) = \frac{M\alpha^2 t_f^2}{2L\sqrt{\underbrace{\cancel{L^2 - \alpha t_f^2}}_{0}}} = \infty$$

Ahora bien, recordemos que se pedía la energía cinética en función de la posición, por lo despejamos *t(x)* y reemplazamos para tener lo pedido:

$$x(t) = L - \sqrt{L^2 - \alpha t^2} \quad \rightarrow \quad t(x) = \sqrt{\frac{L^2 - (L-x)^2}{\alpha}}$$

$$\therefore K = \frac{M\alpha(L^2 - (L-x)^2)}{2L(L-x)} = \frac{T_0(L^2 - (L-x)^2)}{2(L-x)}$$

b) Se calcula el momentum lineal según:

$$p(t) = m(t)\dot{x}(t) = \frac{M\alpha t}{L} = T_0 t$$

$$p(x) = T_0 \sqrt{\frac{L^2 - (L-x)^2}{\alpha}}$$

Luego el máximo será:

$$\frac{dp}{dt} = T_0$$

Es decir, el momento lineal aumenta de manera constante en tiempo, por lo que su valor máximo se alcanza al instante final donde el balde llega al muro:

$$p_{max} = T_0 t_f = \sqrt{MLT_0}$$

2. Tres partículas de igual masa m están inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal. Dos de ellas se encuentran alineadas a lo largo del eje X, ubicadas en las posiciones $x = 0$ y $x = 5\,\mathrm{m}$, respectivamente. La tercera partícula está situada en $x = 10\,\mathrm{m}$, pero ligeramente desviada en la dirección del eje Y. En un instante determinado, se le imparte a la partícula ubicada en $x = 0$ una velocidad de magnitud v_0 dirigida a lo largo del eje X. Todos los choques entre partículas son perfectamente elásticos. Luego de una serie de colisiones, se observa que una de las partículas emerge con momento lineal en el plano XY, formando un ángulo de $30°$ con el eje X. Determine:

   a) El vector momentum lineal de las tres partículas después de ocurrido el último choque.

   b) El momentum lineal de las tres partículas después del último choque, cuando la masa de la segunda partícula cambia a $2m$. En esta parte, el ángulo de $30°$ lo forma la velocidad de la partícula de masa $2m$ con el eje X.

a) Dado que no se está en presencia de fuerzas externas, se conserva el momento lineal. Además, por enunciado, los choques son elásticos por lo que se conserva la energía cinética. Así, para el primer choque:

$$\left.\begin{aligned} P_i = P_f &\rightarrow m v_0 = m v_1 + m v_2 \\ K_i = K_f &\rightarrow \tfrac{1}{2} m v_0^2 = \tfrac{1}{2} m v_1^2 + \tfrac{1}{2} m v_2^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} v_0 &= v_1 + v_2 \\ v_0^2 &= v_1^2 + v_2^2 \end{aligned}$$

$$v_0^2 = v_1^2 + (v_0 - v_1)^2$$

$$v_0^2 - v_1^2 = (v_0 - v_1)^2$$

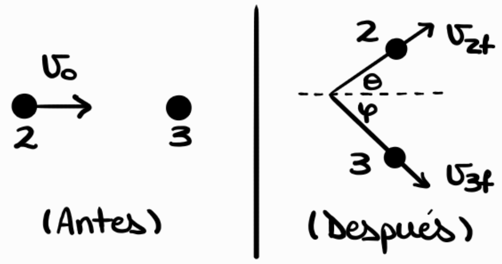
$$(v_0 + v_1)(v_0 - v_1) = (v_0 - v_1)^2$$

$$v_0 + v_1 = v_0 - v_1$$

$$\therefore v_1 = 0 \wedge v_2 = v_0$$

Esto es, la masa 1 choca a la 2 quedándose quieta, mientras que la 2 continúa con la misma velocidad con la que venía la 1 (choque "trivial").

Para el segundo choque, asumimos que la masa 3 está trasladada ligeramente hacia abajo en el eje *Y*. El choque será tal que la masa 2 emergerá con un cierto ángulo θ respecto al eje *X* mientras que la 3 lo hará con un ángulo φ:



$$p_i = p_f \longrightarrow \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{2f} + \vec{p}_{3f} \quad (1)$$

$$K_i = K_f \longrightarrow \frac{p_{2i}^2}{\cancel{2m}} = \frac{p_{2f}^2}{\cancel{2m}} + \frac{p_{3f}^2}{\cancel{2m}} \quad (2)$$

Elevamos (1) al cuadrado y reemplazando en (2):

$$\cancel{p_{2i}^2} = \cancel{p_{2f}^2} + 2\vec{p}_{2f}\cdot\vec{p}_{3f} + \cancel{p_{3f}^2} \qquad / \vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos(\theta)$$

$$\vec{p}_{2f}\cdot\vec{p}_{3f} = p_{2f}\,p_{3f}\cos(\theta+\varphi) = 0 \longrightarrow \cos(\theta+\varphi) = 0$$

Por enunciado nos dicen que una de las masas emerge con un ángulo de 30º. Tomando θ=30º:

$$\cos(30^\circ + \varphi) = 0 \longrightarrow \varphi = 60^\circ$$

Con esto, volvemos a (1) y separamos por componentes:

$$m v_0 \hat{x} = m\vec{v}_{2f} + m\vec{v}_{3f}$$

$$\hat{y}\rfloor \; 0 = m v_{2f}\sin(30^\circ) - m v_{3f}\sin(60^\circ) \longrightarrow v_{2f} = \sqrt{3}\,v_{3f}$$

$$\hat{x}\rfloor \; m v_0 = m v_{2f}\cos(30^\circ) + m v_{3f}\cos(60^\circ) \longrightarrow v_{3f} = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 \;\wedge\; v_{2f} = \frac{1}{2}v_0$$

Concluyendo:

$$\vec{p}_{1f} = 0$$

$$\vec{p}_{2f} = \frac{3}{4}m v_0\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{4}m v_0\hat{y}$$

$$\vec{p}_{3f} = \frac{1}{4}m v_0\hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{4}m v_0\hat{y}$$

b) Volvemos a plantear el problema según las nuevas condiciones:

$$p_i = p_f \rightarrow m v_0 = m v_1 + 2m v_2 \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = v_1 + 2v_2$$

$$K_i = K_f \rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + m v_2^2 \qquad \qquad v_0^2 = v_1^2 + 2v_2^2$$

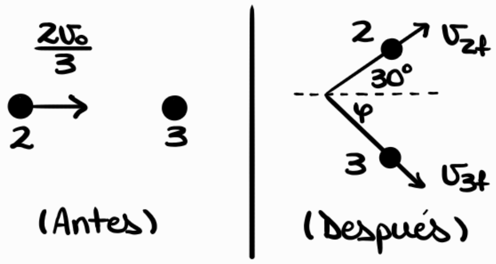
$$v_0^2 = v_1^2 + \frac{1}{2}(v_0 - v_1)^2$$

$$(v_0 + v_1)(v_0 - v_1) = \frac{1}{2}(v_0 - v_1)^2$$

$$v_0 + v_1 = \frac{1}{2}(v_0 - v_1)$$

$$\therefore v_1 = -\frac{v_0}{3} \ \wedge \ v_2 = \frac{2v_0}{3}$$

Para el segundo choque se tendrá:



$$\hat{y} \rfloor \ 0 = 2m v_{2f} \sin(30°) - m v_{3f} \sin(\varphi) \qquad (1)$$

$$\hat{x} \rfloor \ \frac{4}{3} m v_0 = 2m v_{2f} \cos(30°) + m v_{3f} \cos(\varphi) \qquad (2)$$

• $(1)\sin(\varphi) + (2)\cos(\varphi) \rfloor$ $\frac{4}{3} m v_0 \sin(\varphi) = 2m v_{2f} (\sin(30°)\cos(\varphi) + \cos(30°)\sin(\varphi))$

$$\frac{2}{3} v_0 \sin(\varphi) = v_{2f} \sin(30° + \varphi) \qquad (3)$$

• $(1)\sin(30°) - (2)\cos(30°) \rfloor$ $\frac{4}{3} m v_0 \sin(30°) = m v_{3f} (\sin(30°)\cos(\varphi) + \cos(30°)\sin(\varphi))$

$$\frac{4}{3} v_0 \sin(30°) = v_{3f} \sin(30° + \varphi) \qquad (4)$$

Por conservación de energía cinética:

$$\frac{1}{2} 2m\left(\frac{2}{3} v_0^2\right) = \frac{1}{2} 2m v_{2f}^2 + \frac{1}{2} m v_{3f}^2 \rightarrow \frac{8}{9} v_0^2 = 2v_{2f}^2 + v_{3f}^2$$

Reemplazando (3) y (4):

$$\frac{8}{9} v_0^2 = \frac{8 v_0^2 \sin^2(\varphi)}{9 \sin^2(30° + \varphi)} + \frac{16 v_0^2 \sin^2(30°)}{9 \sin^2(30° + \varphi)} \qquad \sin^2(30°) = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2(30° + \varphi) = \sin^2(\varphi) + \frac{1}{2}$$

Una solución para esto es φ=θ=30º, pues:

$$\sin^2(60°) = \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \varphi = 30°$$

De (1) se tiene:

$$2v_{2f}\sin(30°) = v_{3f}\sin(\varphi) \rightarrow v_{2f} = \frac{v_{3f}}{2}$$

Reemplazando en (2):

$$\frac{4}{3}v_0 = \sqrt{3}\left(v_{2f} + \frac{v_{3f}}{2}\right) \rightarrow \frac{4}{3}v_0 = \sqrt{3}\,v_{3f} \rightarrow v_{3f} = \frac{4\sqrt{3}}{9}v_0 \quad \wedge \quad v_{2f} = \frac{2\sqrt{3}}{9}v_0$$

Concluyendo:

$$\vec{p}_{1f} = -\frac{1}{3}mv_0\hat{x}$$

$$\vec{p}_{2f} = \frac{2}{3}mv_0\hat{x} + \frac{2\sqrt{3}}{9}mv_0\hat{\varphi}$$

$$\vec{p}_{3f} = \frac{2}{3}mv_0\hat{x} - \frac{2\sqrt{3}}{9}mv_0\hat{\varphi}$$