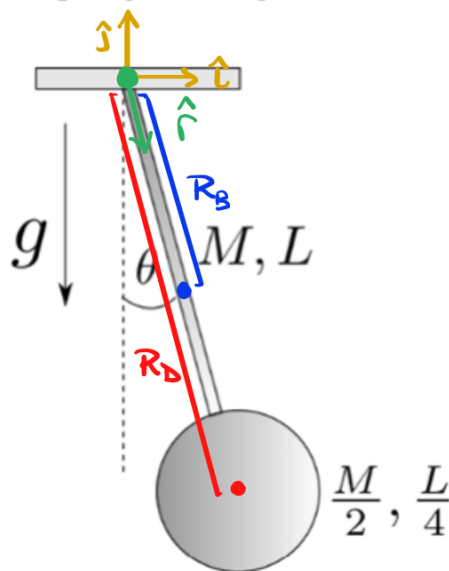


1. Una barra homogénea de masa M y largo L tiene soldado al borde de un disco de masa $M/2$ y radio $L/4$, tal como se muestra en la figura. La magnitud de la aceleración de gravedad es g . El sistema ejecuta pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio estable y en el tiempo $t = 0$ pasa por la posición de equilibrio (de izquierda a derecha) con velocidad de magnitud v_0 . Calcule:

- El momento de inercia del sistema en torno al eje que pasa por el extremo superior O de la barra.
- La posición del centro de masa del sistema con respecto al eje que pasa por O .
- La frecuencia de pequeñas oscilaciones del péndulo en torno a la posición de equilibrio.
- Las componentes de la fuerza que ejerce el eje sobre la barra en función del tiempo.



$$I = \int r^2 dm$$

a) Para calcular el momento de inercia del sistema, se hace para cada uno de los cuerpos que componen el sistema respecto a su centro de masa:

- Disco uniforme de masa M y radio R arbitrarios: $dm = \sigma dS = \frac{M}{\pi R^2} \cdot r dr d\theta$
 $r \in [0, R] \wedge \theta \in [0, 2\pi]$

$$I_{cm}^D = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cdot \frac{M}{\pi R^2} \cdot r dr d\theta$$

$$I_{cm}^D = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr$$

$$I_{cm}^D = \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2} \quad \text{En este caso } M = M/2, R = L/4$$

$$I_{cm}^D = \frac{ML^2}{64}$$

- Barra uniforme de masa M y largo L arbitrarios: $dm = \lambda dl = \frac{M}{L} dz$
 $z \in [-L/2, L/2]$

$$I_{cm}^B = \int_{-L/2}^{L/2} z^2 \cdot \frac{M}{L} \cdot dz$$

$$I_{cm}^B = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} z^2 dz$$

$$I_{cm}^B = \frac{M}{L} \cdot \frac{L^3}{3} \Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{ML^2}{12}$$

Se aplica el Teorema de ejes paralelos de Steiner para desplazar los momentos de inercia respecto al punto al cual están rotando:

$$I_D^B = I_{cm}^B + \frac{M}{2} R_D^2 = \frac{ML^2}{64} + \frac{M}{2} \cdot \left(\frac{5L}{4}\right)^2 = \frac{51ML^2}{64}$$

$$I_B^B = I_{cm}^B + MR_B^2 = \frac{ML^2}{12} + M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

El momento de inercia será la suma de ambos resultados:

$$I_0 = I_D^B + I_B^B = \frac{51ML^2}{64} + \frac{ML^2}{3} = \frac{217ML^2}{192} \quad \checkmark$$

b) Para calcular el centro de masa del sistema completo, se hace sobre los centros de masa de cada componente. De esta forma:

$$\vec{R}_G = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{M \cdot \frac{L}{2} \hat{r} + \frac{M}{2} \cdot \frac{5L}{4} \hat{r}}{M + \frac{M}{2}} = \frac{3L}{4} \hat{r} \quad \checkmark$$

c) Para encontrar la frecuencia de pequeñas oscilaciones, se procede mediante la ecuación del torque respecto al **pivote fijo**:

$$\vec{\tau}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt}$$

Para el momento angular se tiene:

$$\vec{L}_0 = I_0 \vec{\omega} = I_0 \cdot \dot{\theta} \hat{k} \rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} = I_0 \ddot{\theta} \hat{k}$$

La única fuerza que ejerce torque es el peso:

$$\vec{\tau}_0 = \vec{R}_G \times M\vec{g} = \frac{3L}{4} (\sin(\theta)\hat{i} - \cos(\theta)\hat{j}) \times -\frac{3M}{2} g\hat{j} = -\frac{9}{8} MLg \sin(\theta) \hat{k}$$

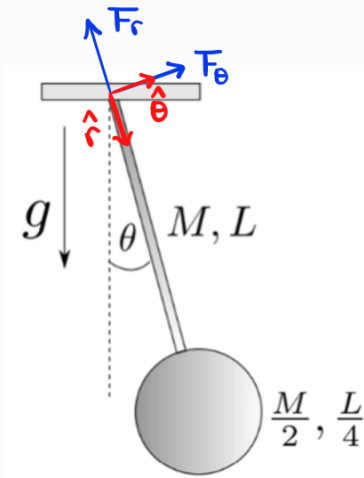
Luego:

$$I_0 \ddot{\theta} = -\frac{9}{8} MLg \sin(\theta) \quad / \sin(\theta) \sim \theta \text{ si } |\theta| \ll 1$$

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{9}{8} \frac{MLg}{I_0}}_{\omega^2} \theta = 0 \quad (1)$$

$$\therefore \omega_{po} = \sqrt{\frac{9MLg}{8I_0}}$$

d) Se plantea la 2da Ley de Newton considerando las componentes de la fuerza que ejerce el eje sobre la barra y el peso:



$$\frac{3}{2}M \cdot \ddot{\vec{R}}_e = \sum \vec{F}$$

$$\frac{3}{2}M \cdot \frac{3}{4}L(-\ddot{\theta}\hat{r} + \ddot{\theta}\hat{\theta}) = \frac{3}{2}Mg(-\hat{j}) - F_r\hat{r} + F_\theta\hat{\theta}$$

$$\frac{9}{8}ML(-\ddot{\theta}\hat{r} + \ddot{\theta}\hat{\theta}) = \frac{3}{2}Mg(\cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}) - F_r\hat{r} + F_\theta\hat{\theta}$$

$$\hat{r} \downarrow -\frac{9}{8}ML\ddot{\theta} = \frac{3}{2}Mg\cos(\theta) - F_r \rightarrow F_r = \frac{3}{2}Mg\cos(\theta) + \frac{9}{8}ML\ddot{\theta}$$

$$\hat{\theta} \downarrow \frac{9}{8}ML\ddot{\theta} = -\frac{3}{2}Mg\sin(\theta) + F_\theta \rightarrow F_\theta = \frac{3}{2}Mg\sin(\theta) + \frac{9}{8}ML\ddot{\theta}$$

Usando aproximación de pequeñas oscilaciones: ($\sin(\theta) \sim \theta$ ^ $\cos(\theta) \sim 1$)

$$F_r = \frac{3}{2}Mg + \frac{9}{8}ML\ddot{\theta} \quad \wedge \quad F_\theta = \frac{3}{2}Mg\theta + \frac{9}{8}ML\ddot{\theta}$$

Resolviendo la ecuación (1) se tiene:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

• $\theta(t=0) = A = 0$ ("pasa por posición de equilibrio")

• $R_e \dot{\theta}(t=0) = \frac{3L}{4} \cdot B\omega = v_0 \rightarrow B = \frac{4v_0}{3L\omega}$

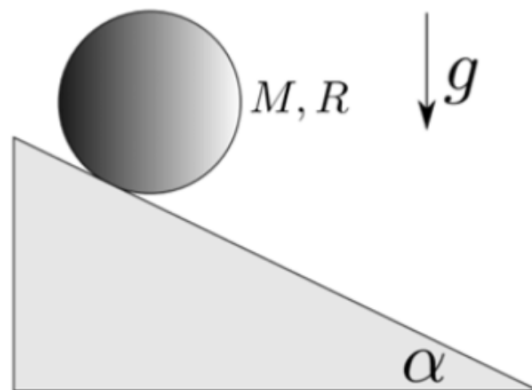
$$\theta(t) = \frac{4v_0}{3L\omega} \sin(\omega t), \quad \dot{\theta}(t) = \frac{4v_0}{3L} \cos(\omega t), \quad \ddot{\theta}(t) = -\frac{4v_0\omega}{3L} \sin(\omega t)$$

Finalmente se concluye:

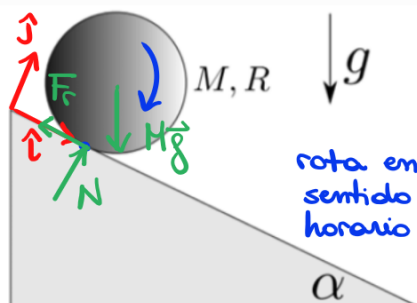
$$F_r = \frac{3}{2}Mg + \frac{2Mv_0^2}{L} \cos^2(\omega t) \quad \wedge \quad F_\theta = Mv_0 \left(\frac{2g}{L\omega} - \frac{3\omega}{2} \right) \sin(\omega t)$$

2. Considere un cilindro macizo de radio R , altura h , masa M y de densidad uniforme que rueda sin resbalar por un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal debido a su peso. Determine:

- La ecuación de movimiento del centro de masas mediante torque y la segunda ley de Newton.
- Lo mismo que en la parte a), pero esta vez haciendo uso de la conservación de la energía. ¿Por qué la condición de rodar sin resbalar permite el uso de la conservación de la energía?



a) La condición de rodar sin resbalar establece que el punto de contacto entre el cilindro y el plano tiene velocidad nula relativa al plano, lo que se traduce en:



$$v_{cm} = R\omega$$

$$dx = -Rd\theta \rightarrow \begin{cases} x = -R\theta \\ \dot{x} = -R\dot{\theta} \\ \ddot{x} = -R\ddot{\theta} \end{cases}$$

El momento angular respecto al centro de masa será:

$$\vec{L}_c = \mathcal{I}_c \vec{\omega} = -\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}\hat{k}$$

De las fuerzas presentes, el peso no hace torque debido a que se "encuentra" en el origen y la normal no lo hace al apuntar hacia el centro de masa. De esta forma, solo ejerce torque la fuerza de roce:

$$\vec{\tau} = -R\hat{j} \times -F_r\hat{i} = -RF_r\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt} \rightarrow -RF_r = -\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta}$$

Reemplazando la condición de rodar sin resbalar:

$$F_r = \frac{1}{2}M\ddot{x}$$

Planteando la 2da Ley de Newton para el centro de masa: ($\vec{R}_{cm} = x\hat{i} + R\hat{j}$)

$$M\ddot{\vec{R}}_{cm} = \sum \vec{F}$$

$$M\ddot{x}\hat{i} = -F_r\hat{i} + N\hat{j} - Mg(-\sin(\alpha)\hat{i} + \cos(\alpha)\hat{j})$$

$$\hat{i} \rceil M\ddot{x} = -F_r + Mg\sin(\alpha) \rightarrow \frac{3}{2}M\ddot{x} = Mg\sin(\alpha)$$

$$\hat{j} \rceil N = Mg\cos(\alpha)$$

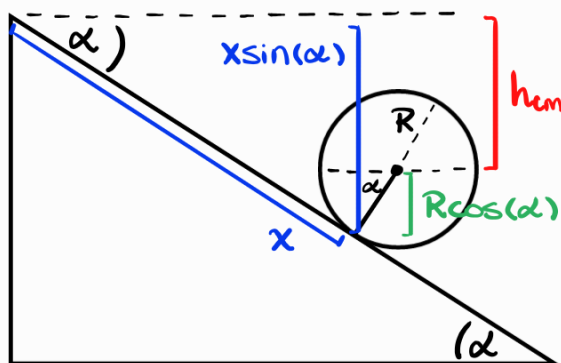
Resolviendo la ecuación para x, se tiene:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{3}g\sin(\alpha)t^2$$

b) Por conservación de la energía se tendrá:

$$E = K_{rot} + K_{trad} + U = \frac{1}{2}(I_{cm}\omega^2 + Mv_{cm}^2) + U = cte$$

Tomando como referencia la cima del plano inclinado para la energía potencial ($U=0$), en cualquier posición será:



$$U = -mgh_{cm}$$

$$U = -Mg(x\sin(\alpha) - R\cos(\alpha))$$

Así la energía resulta:

$$E = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - Mg(x\sin(\alpha) - R\cos(\alpha))$$

Reemplazando la condición de rodar sin resbalar:

$$E = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 - Mg(x\sin(\alpha) - R\cos(\alpha))$$

Se deriva para obtener la ecuación de movimiento:

$$\frac{3}{2}M\dot{x}\ddot{x} - Mg\dot{x}\sin(\alpha) = 0 \rightarrow \frac{3}{2}M\ddot{x} = Mg\sin(\alpha)$$

Se puede usar la conservación de la energía, ya que la fuerza de roce no hace trabajo, debido a que el cilindro rueda sin resbalar. Es interesante notar que, por otro lado, si produce torque.