Si S_1 tiene radio constante R_0, entonces al momento del choque $r_{S_1} = r_{S_2} = R_0$ el cual es el mismo para S_2. Ambos tendrán velocidad tangencial a la circunferencia de radio R_0.

a) El momento angular dado por $\vec{l} = m\vec{r} \times \vec{v}$ es

$$l_1 = mR_0 v_1 \quad y \quad l_2 = mR_0 v_2$$

Con v_1 y v_2 las velocidades de S_1 y S_2, respectivamente.

Luego, por cónicas se tiene que

$$r(\phi) = \frac{R}{1 + e\cos(\phi)}$$, donde e es la excentricidad.

Es posible notar que $r(0) = r_{min}$ y $r(\pi) = r_{max}$. Entonces

$$r_{min} = \frac{R}{1+e} = R_0 \quad y \quad r_{max} = \frac{R}{1-e} = 8R_0$$

$$R = R_0(1+e) \quad y \quad R = 8R_0(1-e)$$

$$R_0(1+e) = 8R_0(1-e) \Rightarrow 1+e = 8 - 8e \Rightarrow e = 7/9 \quad y \quad R = \frac{16R_0}{9}$$

Además $R = \frac{l_2^2}{GMm^2}$ despejando queda $\frac{16}{9}R_0 = \frac{l_2^2}{GMm^2}$

$$\Rightarrow l_2 = \frac{4m}{3}\sqrt{GMR_0} \Rightarrow v_2 = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{GM}{R_0}}$$

Para l_1 se tiene que $r_{min} = r_{max} \Rightarrow R = R_0$

$$R_0 = \frac{l_1^2}{GMm^2} \Rightarrow l_1 = m\sqrt{GMR_0}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_0}}$$

b) Al acoplarse, se conserva el momentum

$$p_1 + p_2 = p_3 \Rightarrow v_3 = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Reemplazando $v_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\sqrt{\frac{GM}{R_0}} + \sqrt{\frac{GM}{R_0}}\right) = \frac{7}{6}\sqrt{\frac{GM}{R_0}}$

Entonces, la energía cinética es $K = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot \frac{49GM}{36R_0}$

c) La energía potencial está dada por $U = -\frac{2mMG}{R_0}$

y la energía total $E = K + U = \frac{-23mMG}{36R_0}$

En los radios mínimo y máximo $\dot{r} = 0$, entonces el potencial efectivo

$$U_{eff} = E = \frac{l_3^2}{4mr^2} - \frac{2mMG}{r} = \frac{-23mMG}{36R_0}$$

$$l_3 = l_1 + l_2 = m\sqrt{GMR_0} + \frac{4}{3}m\sqrt{GMR_0} = \frac{7}{3}m\sqrt{GMR_0}$$

$$E = \frac{49}{36}\frac{\cancel{m^2GM}R_0}{\cancel{m}r^2} - \frac{2\cancel{mMG}}{r} = \frac{-23\cancel{mMG}}{36R_0}$$

$$E = \frac{49}{36}\frac{R_0}{r^2} - \frac{2}{r} = \frac{-23}{36R_0}$$

$$\frac{23r^2}{36R_0} - 2r + \frac{49R_0}{36} = 0$$

$$r^2 - \frac{72R_0r}{23} + \frac{49}{23}R_0^2 = 0$$

resolver cuadrática

$r_{min} \approx 0{,}965R_0$ $\quad$ $r_{max} \approx 2{,}307R_0$