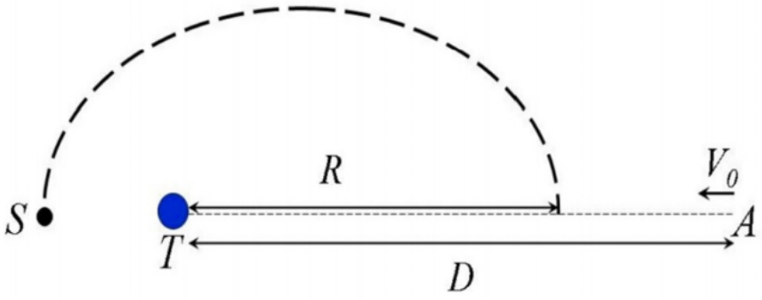
1. Se acaba de descubrir un asteroide a una distancia D de la Tierra que se aproxima con rapidez V_0 directamente hacia ella. Por suerte se dispone de un satélite S que se encuentra justo al otro lado de la Tierra, tal como se ve en la imagen. El plan es dar al satélite una órbita elíptica tal que choque al asteroide de manera perpendicular a su trayectoria, destruyéndolo en el acto.



a) Si se observó que $V_0^2 = 2GM/D$, determine la distancia entre el asteroide y la Tierra en función del tiempo. (Suponiendo que la situación de la imagen ocurre en $t = 0$).

b) Determine la distancia R_I de interceptación, suponiendo que la excentricidad e de la órbita es conocida. **Hint:** Encuentre una expresión para el semieje mayor y use la tercera ley de Kepler para determinar el tiempo en que el satélite impacta al asteroide).

c) Si en $t = 0$ el satélite está a una distancia $D/5$ de la Tierra, escriba la ecuación algebraica que permite obtener la excentricidad.

a) Poniendo el sistema de referencia en el centro de la Tierra, se tienen las siguientes condiciones iniciales del asteroide:

$$x(t=0) = D \qquad \dot{x}(t=0) = V_0 = \sqrt{\frac{2GM}{D}}$$

Con esto podemos encontrar el valor de la energía inicial:

$$E = K + U = \frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{GMm}{x(t=0)} = \frac{1}{2} m \cancel{\frac{2GM}{D}} - \cancel{\frac{GMm}{D}} = 0$$

Como la energía se conserva, en todo momento se tendrá:

$$E = K + U = 0 \rightarrow \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{GMm}{x}$$

$$\dot{x} = -\sqrt{2GM} \cdot x^{-1/2}$$

Resolviendo la EDO se determina lo pedido:

$$\sqrt{x}\,\frac{dx}{dt} = -\sqrt{2GM} \qquad / \int_0^t dt$$

$$\int_{x(t=0)}^{x(t)} \sqrt{x}\, dx = -\int_0^t \sqrt{2GM}\, dt$$

$$\frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_{x(t=0)}^{x(t)} = -\sqrt{2GM}\, t$$

$$x(t)^{3/2} - D^{3/2} = -\frac{3}{2}\sqrt{2GM}\,t$$

$$\therefore x(t) = \left[D^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{2GM}\,t\right]^{2/3}$$

b) Para una órbita elíptica, sabemos que el semieje mayor será:

$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2}, \quad r_{min} = \frac{R}{1+e}, \quad r_{max} = \frac{R}{1-e} = R_I$$

Se desprende la relación $R = R_I(1-e)$. Se despeja el semieje mayor:

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{1+e} + \frac{R}{1-e}\right) = \frac{R_I}{2}\left(\frac{1-e}{1+e} + 1\right) = \frac{R_I}{1+e}$$

Con este valor, utilizamos la tercera Ley de Kepler para encontrar el periodo (tiempo para hacer una vuelta):

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_I^3}{GM(1+e)^3}}$$

Nosotros queremos la distancia de interceptación que ocurre cuando el satélite ha dado media vuelta, es decir, cuando ha transcurrido un tiempo T/2. Así, podemos calcular la distancia evauando este tiempo en la expresión encontrada en a):

$$R_I = x(t = T/2) = \left[D^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{2\cancel{GM}}\sqrt{\frac{\pi^2 R_I^3}{\cancel{GM}(1+e)^3}}\right]^{2/3}$$

$$R_I^{3/2} = D^{3/2} - \frac{3\pi R_I^{3/2}}{\sqrt{2}(1+e)^3}$$

$$R_I^{3/2}\left(1 + \frac{3\pi}{\sqrt{2}(1+e)^3}\right) = D^{3/2}$$

$$\therefore R_I = D\left(1 + \frac{3\pi}{\sqrt{2}(1+e)^3}\right)^{-2/3}$$

c) Nos están diciendo $r_{min} = D/5$. Por lo anterior teníamos $r_{min} = R_I\left(\frac{1-e}{1+e}\right)$. Luego, la expresión para determinar la excetricidad será:

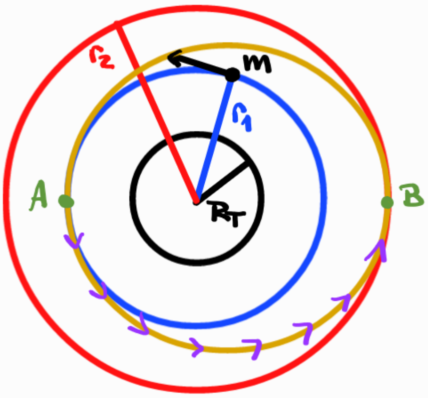
$$\frac{D}{5} = D\left(1 + \frac{3\pi}{\sqrt{2}(1+e)^3}\right)^{-2/3}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)$$

2. Un vehículo espacial está en órbita circular alrededor de la Tierra. La masa del vehículo es m y el radio de la órbita es dos veces el de la tierra $r_1 = 2R_T$. Si se desea transferir el vehículo a una órbita circular de radio $r_2 = 4R_T$:

a) Calcule la cantidad mínima de energía que se debe emplear para hacer la operación.

b) Una forma eficiente de realizar la transferencia es utilizar una órbita semi elíptica (conocida con el nombre de órbita de transferencia de Hohmann). ¿Qué cambios de velocidad hay que aplicar en los puntos de intersección A y B para lograr la transferencia?

c) Grafique el potencial **efectivo** y discuta los tipos de movimiento que se tendrán según la energía del sistema.



a) La aceleración en coordenadas polares está dada por:

$$\vec{a} = (\cancel{\ddot{r}}^{\,0} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} + \cancel{2\dot{r}\dot{\theta}}^{\,0})\,\hat{\theta}$$

Luego, por 2da Ley de Newton:

$$-mr\dot{\theta}^2 = -m\frac{v^2}{r} = -\frac{GMm}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_T}{r}$$

La energía será E=K+U, y así, la diferencia entre órbitas resulta:

$$\Delta E = E_f - E_i = K_f + U_f - K_i - U_i$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}m\frac{GM}{4R_T} - \frac{1}{2}m\frac{GM}{2R_T} + \frac{GMm}{4R_T} - \frac{GMm}{2R_T}$$

$$\therefore \Delta E = G\frac{Mm}{8R_T}$$

b) Consideramos que el vehículo ya se encuentra en órbita elíptica. Como se conserva el momento angular, $L_A = L_B$:

$$m \cdot 2R_T \cdot V_A = m \cdot 4R_T \cdot V_B \Rightarrow V_A = 2V_B$$

Como sólo se está en presencia de una fuerza conservativa, la energía se conserva:

$$E_A = E_B$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\overset{4V_B^2}{V_A^2} - \frac{GM\cancel{m}}{2R_T} = \frac{1}{2}\cancel{m}V_B^2 - \frac{GM\cancel{m}}{4R_T}$$

$$2V_B^2 - \frac{1}{2}V_B^2 = \frac{GM}{2R_T} - \frac{GM}{4R_T}$$

$$\frac{3}{2}V_B^2 = \frac{GM}{4R_T}$$

$$V_B = \sqrt{\frac{GM}{6R_T}} \quad \wedge \quad V_A = \sqrt{\frac{2GM}{3R_T}}$$

Ahora vemos las diferencias de velocidad en cada punto, recordando que ya tenemos expresiones para la velocidad en órbita circular:

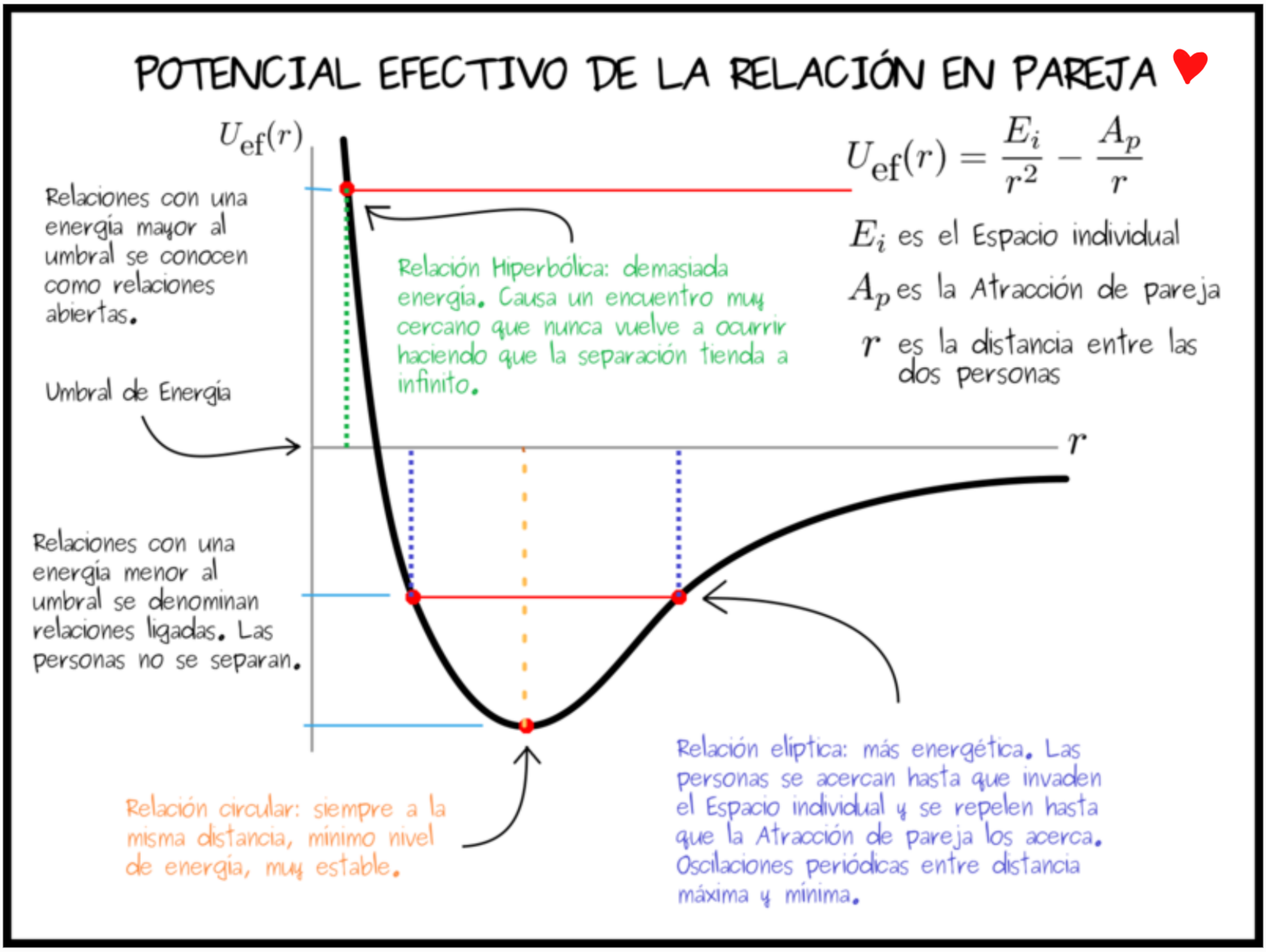
- En A, el cambio de velocidad será:

$$\Delta v_A = V_A - V_0 = \sqrt{\frac{2GM}{3R_T}} - \sqrt{\frac{GM}{2R_T}}$$

- En B, el cambio de velocidad será:

$$\Delta v_B = V_f - V_B = \sqrt{\frac{GM}{4R_T}} - \sqrt{\frac{GM}{6R_T}}$$

c)



3. Una masa m está sometida a la siguiente fuerza central, con $A > 0$ mientras que B puede ser positivo o negativo:

$$F(r) = -\frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^3}$$

a) Discuta los tipos de movimiento que pueden ocurrir.

b) Demuestre que si $l^2 > -mB$, entonces las órbitas acotadas tienen la forma:

$$r(\theta) = \frac{R}{1 + \varepsilon \cos(\alpha\theta)}$$

a) Sabemos que si se tiene una fuerza central F(r), la ecuación de Binet estará dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u = -\frac{m}{L^2 u^2} F(1/u)$$

Donde el momentum angular $L = mr^2\dot{\theta}$ y la energía mecánica del sistema $E = K + U$ se conservan. La ecuación diferencial a resolver será:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\frac{m}{L^2 u^2}(-Au^2 + Bu^3) - u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{mA}{L^2} - \left(1 + \frac{mB}{L^2}\right)u$$

La ecuación tendrá distintas soluciones según el signo de $\left(1 + \frac{mB}{L^2}\right)$

- $1 + \frac{mB}{L^2} < 0 \rightarrow L^2 < -mB \rightarrow B < 0,\ K = -\left(1 + \frac{mB}{L^2}\right) > 0$:

$$u'' = \frac{mA}{L^2} + Ku$$

$v = \frac{mA}{KL^2} + u$

$u' = v' \wedge u'' = v''$

$$v'' = Kv$$

$v(\theta) = C_1 e^{\sqrt{K}\theta} + C_2 e^{-\sqrt{K}\theta}$

$v(\theta) = C_1 \cdot \cosh(\sqrt{K}\theta + C_2)$

$$v(\theta) = C_1 \cdot \cosh(\sqrt{K}\theta + C_2)$$

$$u(\theta) = C_1 \cdot \cosh(\sqrt{K}\theta + C_2) - \frac{mA}{KL^2}$$

$$r(\theta) = \frac{1}{C_1 \cdot \cosh(\sqrt{K}\theta + C_2) - \frac{mA}{KL^2}}$$

- $1 + \frac{mB}{L^2} = 0 \rightarrow L^2 = -mB \rightarrow B < 0$:

$$u'' = \frac{mA}{L^2}$$

$$u(\theta) = C_1 + C_2\theta + \frac{mA}{2L^2}\theta^2$$

$$r(\theta) = \frac{1}{c_1 + c_2\theta + \frac{mA}{2L^2}\theta^2}$$

- $1 + \frac{mB}{L^2} > 0 \rightarrow L^2 > -mB \rightarrow B < 0 \vee B > 0,\ K = \left(1 + \frac{mB}{L^2}\right) > 0:$

$$u'' = \frac{mA}{L^2} - Ku$$

$v = u - \frac{mA}{KL^2}$

$u' = v' \wedge u'' = v''$

$$v'' = -Kv$$

$v(\theta) = c_1 e^{i\sqrt{K}\theta} + c_2 e^{-i\sqrt{K}\theta}$

$v(\theta) = c_1 \cdot \cos(\sqrt{K}\theta + c_2)$

$$v(\theta) = c_1 \cdot \cos(\sqrt{K}\theta + c_2)$$

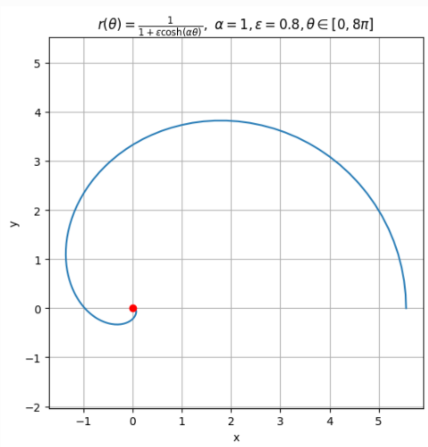
$$u(\theta) = c_1 \cdot \cos(\sqrt{K}\theta + c_2) + \frac{mA}{KL^2}$$

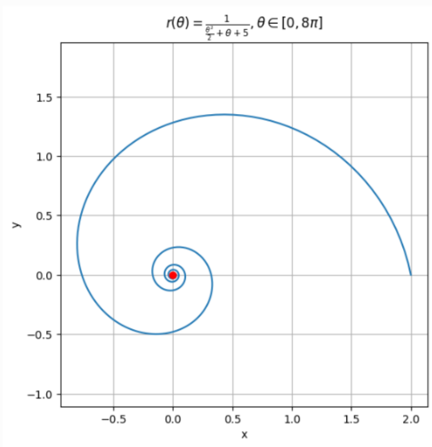
$$r(\theta) = \frac{1}{c_1 \cdot \cos(\sqrt{K}\theta + c_2) + \frac{mA}{KL^2}}$$

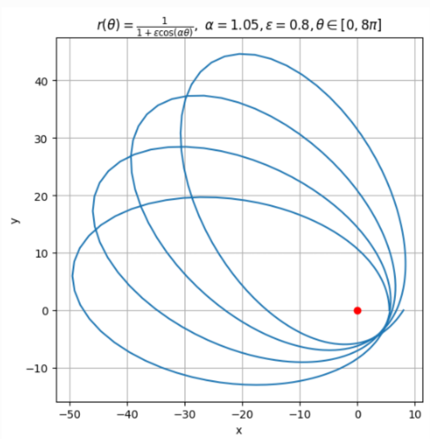
Hagamos aparecer un 1 para tener lo pedido

$$r(\theta) = \frac{\frac{KL^2}{mA}}{1 + \frac{KL^2}{mA} c_1 \cos(\sqrt{K}\theta + c_2)} = \frac{R}{1 + \varepsilon\cos(\alpha\theta + c_2)}$$

$$\boxed{R = \frac{KL^2}{mA} = \frac{L^2 + mB}{mA},\ \varepsilon = c_1 R,\ \alpha = \sqrt{1 + \frac{mB}{L^2}}}$$

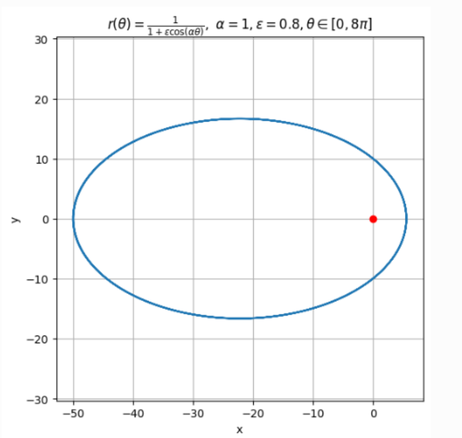




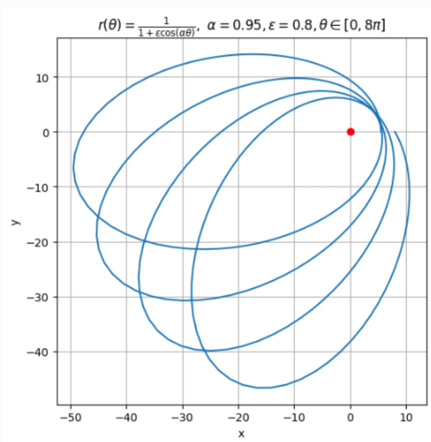


$\alpha > 1$

"rota" a la derecha



$\alpha = 1$



$\alpha < 1$

"rota" a la izquierda