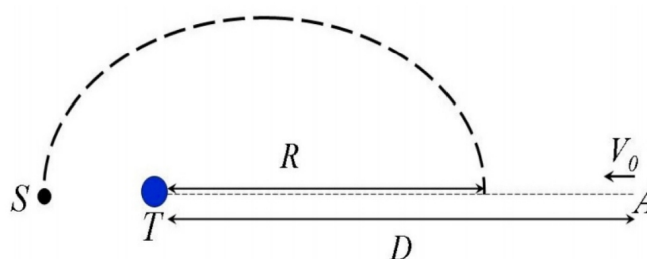


FI2001-5 Mecánica**Profesor:** Claudio Romero.**Auxiliares:** Rodrigo Catalán, Joaquín Guzmán & Matías Urrea.**Ayudante:** Facundo Esquivel.**Auxiliar 10+1: Órbitas**

28 de abril de 2025

1. Se acaba de descubrir un asteroide a una distancia D de la Tierra que se aproxima con rapidez V_0 directamente hacia ella. Por suerte se dispone de un satélite S que se encuentra justo al otro lado de la Tierra, tal como se ve en la imagen. El plan es dar al satélite una órbita elíptica tal que choque al asteroide de manera perpendicular a su trayectoria, destruyéndolo en el acto.



- Si se observó que $V_0^2 = 2GM/D$, determine la distancia entre el asteroide y la Tierra en función del tiempo. (Suponiendo que la situación de la imagen ocurre en $t = 0$).
 - Determine la distancia R_I de interceptación, suponiendo que la excentricidad e de la órbita es conocida. **Hint:** Encuentre una expresión para el semieje mayor y use la tercera ley de Kepler para determinar el tiempo en que el satélite impacta al asteroide).
 - Si en $t = 0$ el satélite está a una distancia $D/5$ de la Tierra, escriba la ecuación algebraica que permite obtener la excentricidad.
2. Un vehículo espacial está en órbita circular alrededor de la Tierra. La masa del vehículo es m y el radio de la órbita es dos veces el de la tierra $r_1 = 2R_T$. Si se desea transferir el vehículo a una órbita circular de radio $r_2 = 4R_T$:
- Calcule la cantidad mínima de energía que se debe emplear para hacer la operación.
 - Una forma eficiente de realizar la transferencia es utilizar una órbita semi elíptica (conocida con el nombre de órbita de transferencia de Hohmann). ¿Qué cambios de velocidad hay que aplicar en los puntos de intersección A y B para lograr la transferencia?
 - Grafique el potencial **efectivo** y discuta los tipos de movimiento que se tendrán según la energía del sistema.

3. Una masa m está sometida a la siguiente fuerza central, con $A > 0$ mientras que B puede ser positivo o negativo:

$$F(r) = -\frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^3}$$

- a) Discuta los tipos de movimiento que pueden ocurrir.
b) Demuestre que si $l^2 > -mB$, entonces las órbitas acotadas tienen la forma:

$$r(\theta) = \frac{R}{1 + \varepsilon \cos(\alpha\theta)}$$

- c) [**Propuesto**] Usando conservación de la energía, determine el valor de ε en función de los datos del problema.

Cónicas

La posición de un cuerpo que se encuentra orbitando en función del ángulo viene dado por:

$$r(\varphi) = \frac{R}{1 + e \cos(\varphi)}$$

$$R = \frac{L^2}{GMm^2} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$$

Donde R define la escala de la órbita mientras que e es la excentricidad de la misma, que tendrá las siguientes formas según el caso:

- $e = 0$ órbita circular.
- $0 < e < 1$ órbita elíptica.
- $e = 1$ órbita parabólica.
- $e > 1$ órbita hiperbólica.

Para órbitas elípticas, se cumplirán las siguientes relaciones:

$$r_{min} = r(\varphi = 0) = \frac{R}{1 + e} \quad r_{max} = r(\varphi = \pi) = \frac{R}{1 - e}$$

$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2}$$

Leyes de Kepler

Las Leyes de Kepler son tres principios fundamentales que describen el movimiento de los planetas alrededor del Sol, formuladas por el astrónomo alemán Johannes Kepler a principios del siglo XVII. Estas plantean lo siguiente:

1. **Primera Ley (Ley de las órbitas):** Los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el Sol en uno de los focos.
2. **Segunda Ley (Ley de las áreas):** El radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales. Esto significa que los planetas se mueven más rápido cuando están más cerca del Sol.
3. **Tercera Ley (Ley de los periodos):** El cuadrado del periodo orbital de un planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse que describe. Esto es:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Ecuación de Binet

La ecuación de Binet es una ecuación diferencial que describe la trayectoria de un cuerpo en movimiento bajo la acción de una fuerza central. Se utiliza principalmente en mecánica celeste y física para estudiar las órbitas de cuerpos alrededor de un punto central, como los planetas alrededor del Sol o los electrones alrededor de un núcleo atómico.

La ecuación de Binet se expresa en términos de la variable $u = \frac{1}{r}$, donde r es la distancia radial entre el cuerpo y el punto central, y u es la inversa de esta distancia. La forma de la ecuación es:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{F(r)}{L^2u^2}$$

donde:

- $u = \frac{1}{r}$ es la inversa de la distancia radial.
- θ es el ángulo polar que describe la posición del cuerpo respecto al centro de fuerzas.
- $F(r)$ es la magnitud de la fuerza central que depende de la distancia r .
- L es el momento angular del cuerpo respecto al punto central, el cual se conserva debido a la naturaleza de la fuerza central.