

FI2001-5 Mecánica**Profesor:** Claudio Romero.**Auxiliar:** Rodrigo Catalán, Joaquín Guzmán & Matías Urrea.**Ayudante:** Facundo Esquivel.**Ejercicio 3**

2 de abril de 2025

1. **Utilizando el principio de superposición**, encuentre el movimiento de un oscilador armónico subamortiguado con $\gamma = \omega_0/3$, que inicialmente está en reposo y que después de $t = 0$ es sometido a una fuerza externa:

$$F = F_1 \sin(\omega_0 t) + F_2 \sin(3\omega_0 t)$$

Donde ω_0 es la frecuencia natural del oscilador.

2. ¿Qué valor de la razón F_1/F_2 se requiere para que la oscilación forzada de frecuencia $3\omega_0$ tenga la misma amplitud que la oscilación con frecuencia ω_0 ?

Nota: La solución de la ecuación:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t + \theta_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t + \theta_0)$$

Para movimiento subamortiguado es:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \phi) + \frac{F_0}{m} \frac{\sin(\omega t + \theta_0 + \beta)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

Donde $\gamma = \frac{b}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\tan(\beta) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}$ y $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

1. Utilizando el principio de superposición, encuentre el movimiento de un oscilador armónico subamortiguado con $\gamma = \omega_0/3$, que inicialmente está en reposo y que después de $t = 0$ es sometido a una fuerza externa:

$$F = F_1 \sin(\omega_0 t) + F_2 \sin(3\omega_0 t)$$

Donde ω_0 es la frecuencia natural del oscilador.

Por superposición x_n es solución de F_n

entonces $\sum_k x_k$ son soluciones de $\sum_k F_k$

Reescribiendo F

$$F = F_1 \sin(\omega_0 t) + F_2 \sin(3\omega_0 t) = F_1 \cos(\omega_0 t + \theta_0) + F_2 \cos(3\omega_0 t + \theta_0)$$

$$\theta_0 = -\pi/2$$

Luego, por superposición

$$x_k = \frac{F_k \sin(\omega_k t + \theta_0 + \beta_k)}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_k^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_k^2}} \quad \text{donde } \tan(\beta_k) = \frac{\omega_0^2 - \omega_k^2}{2\gamma \omega_k} \quad +0.5$$

Finalmente el movimiento está dado por

$$x = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \phi) + \frac{F_1 \sin(\omega_0 t + \theta_0 + \beta_1)}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_0^2}} + \frac{F_2 \sin(3\omega_0 t + \theta_0 + \beta_2)}{m \sqrt{(\omega_0^2 - 9\omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 9\omega_0^2}} \quad / \gamma = \omega_0/3$$

$$\Rightarrow x = A e^{-\frac{\omega_0}{3} t} \cos(\omega_1 t + \phi) + \frac{F_1 \sin(\omega_0 t + \theta_0 + \beta_1)}{m \frac{2\omega_0^2}{3}} + \frac{F_2 \sin(3\omega_0 t + \theta_0 + \beta_2)}{m \omega_0^2 \sqrt{68}} \quad +1$$

$$\text{donde } \tan(\beta_1) = \frac{\omega_0^2 - \omega_0^2}{2\gamma \omega_0} = 0, \quad \tan(\beta_2) = \frac{\omega_0^2 - 9\omega_0^2}{2\gamma 3\omega_0} \quad +0.5$$

$$\Rightarrow \tan(\beta_2) = \frac{-8\omega_0^2}{\frac{2\omega_0 \cdot 3\omega_0}{3}} = -4 \Rightarrow \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \arctan(-4) \quad +0.5$$

Luego por condición inicial $+0.5$

$$\dot{x}(t=0) = 0 \Rightarrow A(-\gamma e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \phi) - e^{-\gamma t} \omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi)) - \frac{F_1 \cdot \omega_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0 + \beta_1)}{m \frac{2\omega_0^2}{3}} - \frac{F_2 \cdot 3\omega_0 \cos(3\omega_0 t + \theta_0 + \beta_2)}{m \omega_0^2 \sqrt{68}}$$

$$A_{F_1} = \frac{3F_1}{2\omega_0^2 m}, \quad A_{F_2} = \frac{F_2}{m \omega_0^2 \sqrt{68}}$$

$$\Rightarrow A(-\gamma \cos(\phi) - \omega_1 \sin(\phi)) - A_{F_1} \omega_0 \cos(\theta_0 + \beta_1) - A_{F_2} \cdot 3\omega_0 \cos(\theta_0 + \beta_2) = 0$$

$$A = \frac{A_{F_1} \omega_0 \cos(\theta_0 + \beta_1) + A_{F_2} \cdot 3\omega_0 \cos(\theta_0 + \beta_2)}{(-\gamma \cos(\phi) - \omega_1 \sin(\phi))} \quad +1$$

$$\Rightarrow X(t=0)=0 \Rightarrow A e^{\circ} \cos(\phi)=0$$

$$\Rightarrow \phi = \pi/2 \text{ o } \phi = \arccos(x_0/A) \text{ donde } x(t=0)=x_0$$

2. ¿Qué valor de la razón F_1/F_2 se requiere para que la oscilación forzada de frecuencia $3\omega_0$ tenga la misma amplitud que la oscilación con frecuencia ω_0 ?

Amplitudes:

$$A_{F_1} = \frac{3F_1}{2\omega_0^2 m} \quad +0,5$$

$$A_{F_2} = \frac{F_2}{m\omega_0^2\sqrt{17}} = \frac{F_2}{2m\omega_0^2\sqrt{17}} \quad +0,5$$

$$A_{F_1} = A_{F_2} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{2\omega_0^2 m}{3 \cdot 2\omega_0^2\sqrt{17} m} = \frac{1}{3\sqrt{17}} \quad +0,5$$

