1. La trayectoria de un punto P, usando coordenadas cilíndricas, se define como $\rho(t) = \rho_0, \phi(t) = ?$ y $z(t) = h - B\phi(t)$. Se sabe que $\phi(t)$ es una función monótona, $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = \omega_0$, donde $h, B, \omega_0 > 0$:

   a) Obtenga las expresiones para el vector velocidad $\vec{v}$ y aceleración $\vec{a}$.

   b) Obtenga una expresión para el vector tangente $\hat{t}$ y rapidez v.

   c) Obtenga expresiones para la aceleración centrípeta $\vec{a}_c$ y tangencial $\vec{a}_t$.

   d) Si se sabe que la aceleración apunta en todo tiempo perpendicular al eje Z, encuentre $\phi(t)$.

   e) Utilizando $\phi(t)$, calcule el radio de curvatura y determine explícitamente la aceleración centrípeta.

a) En coordenadas cilíndricas, sabemos que la posición se escribe como $\vec{r}(t) = \rho(t)\hat{\rho} + z(t)\hat{z}$. Luego, con la información entregada:

$$\vec{r}(t) = \rho_0\hat{\rho} + (h - B\phi(t))\hat{z}$$

Para obtener velocidad y aceleración, derivamos la posición respecto al tiempo según corresponda, recordando que $\dot{\hat{\rho}} = \dot{\phi}\hat{\phi}$ y $\dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}\hat{\rho}$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \rho_0\dot{\phi}\hat{\phi} - B\dot{\phi}\hat{z}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho_0(\ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}^2\hat{\rho}) - B\ddot{\phi}\hat{z} = -\rho_0\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \rho_0\ddot{\phi}\hat{\phi} - B\ddot{\phi}\hat{z}$$

b) Para obtener el vector tangente, calculamos primero la rapidez (módulo de velocidad) y luego usamos definición:

$$v = |v(t)| = \sqrt{(\rho_0\dot{\phi})^2 + (-B\dot{\phi})^2} = \dot{\phi}\sqrt{\rho_0^2 + B^2}$$

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\rho_0\dot{\phi}\hat{\phi} - B\dot{\phi}\hat{z}}{\dot{\phi}\sqrt{\rho_0^2 + B^2}} = \frac{\rho_0\hat{\phi} - B\hat{z}}{\sqrt{\rho_0^2 + B^2}}$$

c) Utilizamos las fórmulas de aceleración tangencial y centrípeta:

$$\vec{a}_t = \dot{v}\hat{t} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\phi}\sqrt{\rho_0^2 + B^2}\right)\hat{t} = \ddot{\phi}\sqrt{\rho_0^2 + B^2}\,\hat{t}$$

$$\vec{a}_c = -\frac{v^2}{\rho_c}\hat{n} = -\frac{\dot{\phi}^2(\rho_0^2 + B^2)}{\rho_c}$$

d) Nos dicen que la aceleración es perpendicular al eje *Z*, lo que matemáticamente implica lo siguiente:

$$\vec{a} \cdot \hat{z} = 0$$

$$[-\rho_0\dot{\phi}^2\cancel{\hat{\rho}}^{0} + \rho_0\ddot{\phi}\cancel{\hat{\phi}}^{0} - B\ddot{\phi}\cancel{\hat{z}}^{1}] \cdot \hat{z} = -B\ddot{\phi} = 0$$

$$\therefore \phi(t) = \omega_0 t$$

/ Resolviendo EDO para $\ddot{\phi}$ y $\dot{\phi}$, y usando C.B

e) Para calcular el radio de curvatura, usamos la definición donde ya conocemos aceleración y velocidad:

$$|\vec{v}\times\vec{a}| = |(\rho_0 \overset{\omega_0}{\cancel{\dot\phi}}\hat\phi - B\overset{\omega_0}{\cancel{\dot\phi}}\hat z)\times(-\rho_0\overset{\omega_0^2}{\cancel{\dot\phi^2}}\hat\rho + \rho_0\cancelto{0}{\ddot\phi}\hat\phi - B\cancelto{0}{\ddot\phi}\hat z)|$$

$$\hat\rho \to \hat\phi \to \hat z \to \hat\rho$$

$$= |\rho_0^2\omega_0^3\hat z + \rho_0 B\omega_0^3\hat\phi| = \rho_0\omega_0^3\sqrt{\rho_0^2+B^2}$$

$\dot\phi = \omega_0$ & $\ddot\phi = 0$

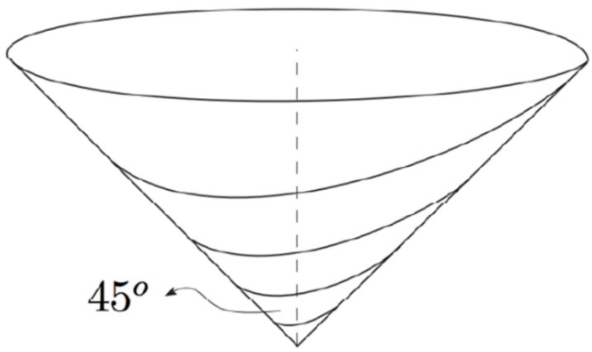
$$v^3 = (\omega_0\sqrt{\rho_0^2+B^2})^3 = \omega_0^3(\rho_0^2+B^2)^{3/2}$$

$$\therefore \rho_c = \frac{v^3}{|\vec{v}\times\vec{a}|} = \frac{\omega_0^3(\rho_0^2+B^2)^{3/2}}{\rho_0\omega_0^3\sqrt{\rho_0^2+B^2}} = \frac{\rho_0^2+B^2}{\rho_0}$$

Y así, la aceleración centrípeta queda:

$$\vec{a}_c = -\frac{\omega_0^2(\rho_0^2+B^2)}{\rho_c}\hat n = -\omega_0^2\rho_0\hat n$$

2. Considere una curva espiral cónica como la presente en la figura, descrita en coordenadas esféricas (origen en cúspide) por las ecuaciones $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $\varphi = \frac{2\pi r}{R}$, siendo R una constante conocida. Una partícula se mueve sobre la espiral partiendo desde el origen y manteniendo una velocidad radial constante y conocida $\dot r = c$.



a) Determine la distancia radial al punto P en el cual la rapidez de la partícula es $3c$.

b) Determine el radio de curvatura de la trayectoria en el punto P.

c) Considerando que la partícula da 4 vueltas, estime la longitud total del espiral recorrido y determine el tiempo que le demoró. Le será de utilidad lo siguiente:

$$\int \sqrt{1+u^2}du = \frac{1}{2}(u\sqrt{1+u^2} + \sinh^{-1}(u)) + C$$

$$\frac{1}{2}(4\pi\sqrt{2+64\pi^2} + \sinh^{-1}(4\pi\sqrt{2})) \approx 160$$

A partir de los datos del enunciado tenemos lo siguiente:

$\dot r = c \rightarrow \ddot r = 0 \wedge r = ct$

$\theta = \pi/4 \rightarrow \dot\theta = \ddot\theta = 0$

$\phi = \frac{2\pi r}{R} \rightarrow \dot\phi = \frac{2\pi c}{R} \wedge \ddot\phi = 0$

Podemos reemplazar esto en las expresiones de posición, velocidad y aceleración de coordenadas esféricas: $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$

(En resumen del aux ::)

$$\vec{r}(t) = r\hat{r} = ct\hat{r}$$

$$\vec{v}(t) = c\hat{r} + \frac{\sqrt{2}\pi c r}{R}\hat{\phi} \longrightarrow v = \sqrt{c^2 + \frac{2\pi^2 c^2 r^2}{R^2}}$$

$$\vec{a}(t) = -\frac{2\pi^2 c^2 r}{R^2}\hat{r} - \frac{2\pi^2 c^2 r}{R^2}\hat{\theta} + \frac{2\sqrt{2}\pi c^2}{R}\hat{\phi}$$

a) Para encontrar *P*, imponemos la condición de la velocidad:

$$v = \sqrt{c^2 + \frac{2\pi^2 c^2 r^2}{R^2}} \overset{!}{=} 3c \rightarrow c^2 + \frac{2\pi^2 c^2 r_P^2}{R^2} = 9c^2$$

$$\rightarrow r_P^2 = \frac{R^2}{2\pi^2 c^2} \cdot 8c^2 \rightarrow r_P = \frac{2R}{\pi}$$

b) Para encontrar el radio de curvatura en *P*, evaluamos dicho punto en las expresiones de velocidad y aceleración:

$$\vec{v}(r = r_P) = c\hat{r} + 2\sqrt{2}c\hat{\phi} \rightarrow v = 3c$$

$$\vec{a}(r = r_P) = -\frac{4\pi c^2}{R}\hat{r} - \frac{4\pi c^2}{R}\hat{\theta} + \frac{2\sqrt{2}\pi c^2}{R}\hat{\phi}$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = -\frac{4\pi c^3}{R}\hat{\phi} - \frac{10\sqrt{2}\pi c^3}{R}\hat{\theta} + \frac{8\sqrt{2}\pi c^3}{R}\hat{r}$$ * Verificar

$$|\vec{v} \times \vec{a}| = \sqrt{\frac{128\pi^2 c^6}{R^2} + \frac{200\pi^2 c^6}{R^2} + \frac{16\pi^2 c^6}{R^2}} = \frac{2\sqrt{86}\pi c^3}{R}$$

$$\rho_c = \frac{v^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|} = \frac{27c^3 \cdot R}{2\sqrt{86}\pi c^3} = \frac{27R}{2\sqrt{86}\pi}$$

c) Cuando la partícula ha dado 4 vueltas, ha recorrido un ángulo de 8π en la dirección azimutal, es decir, el ángulo ϕ . Con esto podemos saber la distancia hasta el origen en este instante, recordando la relación previamente planteada:

$$\phi(r) = \frac{2\pi r}{R} \longrightarrow r^* = \frac{8\pi R}{2\pi} = 4R$$

Con esto se tiene el tiempo que demoró en alcanzar esta posición:

$$r(t) = ct \longrightarrow t^* = \frac{4R}{c}$$

Se calcula la distancia recorrida utilizando el tiempo recién encontrado junto con la expresión de velocidad (con r = ct):

$$L = \int_0^{t^*} \sqrt{c^2 + \frac{2\pi^2 c^4 t^2}{R^2}}\, dt = c\int_0^{t^*} \sqrt{1 + \frac{2\pi^2 c^2 t^2}{R^2}}\, dt$$

$$u = \frac{\sqrt{2}\pi c t}{R} \rightarrow dt = \frac{R\,du}{\sqrt{2}\pi c}, \quad t = 0 \rightarrow u = 0 \;\wedge\; t = t^* \rightarrow u^* = 4\pi\sqrt{2}$$

$$L = \frac{R}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{u^*} \sqrt{1 + u^2}\, du = \frac{R}{\pi\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2}\left(u\sqrt{1+u^2} + \sinh^{-1}(u)\right)\right]\Big|_0^{4\pi\sqrt{2}}$$

$$L = \frac{R}{\pi\sqrt{2}} \underbrace{\left[\frac{1}{2}\left(4\pi\sqrt{2}\sqrt{1+32\pi^2} + \sinh^{-1}(4\pi\sqrt{2})\right)\right]}_{\sim 160} \sim \frac{80\sqrt{2}R}{\pi}$$