FI2001-5 Mecánica
Profesor: Claudio Romero.
Auxiliar: Rodrigo Catalán, Joaquín Guzmán & Matías Urrea.
Ayudante: Facundo Esquivel.

Auxiliar 7: Coordenadas esféricas e intrínsecas

7 de abril de 2025

1. La trayectoria de un punto P, usando coordenadas cilíndricas, se define como $\rho(t) = \rho_0, \phi(t) = ?$ y $z(t) = h - B\phi(t)$. Se sabe que $\phi(t)$ es una función monótona, $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = \omega_0$, donde $h, B, \omega_0 > 0$:

   a) Obtenga las expresiones para el vector velocidad $\vec{v}$ y aceleración $\vec{a}$.

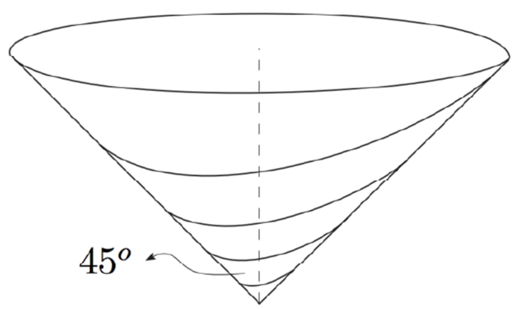
   b) Obtenga una expresión para el vector tangente $\hat{t}$ y rapidez v.

   c) Obtenga expresiones para la aceleración centrípeta $\vec{a}_c$ y tangencial $\vec{a}_t$.

   d) Si se sabe que la aceleración apunta en todo tiempo perpendicular al eje Z, encuentre $\phi(t)$.

   e) Utilizando $\phi(t)$, calcule el radio de curvatura y determine explícitamente la aceleración centrípeta.

2. Considere una curva espiral cónica como la presente en la figura, descrita en coordenadas esféricas (origen en cúspide) por las ecuaciones $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $\varphi = \frac{2\pi r}{R}$, siendo R una constante conocida. Una partícula se mueve sobre la espiral partiendo desde el origen y manteniendo una velocidad radial constante y conocida $\dot{r} = c$.



   a) Determine la distancia radial al punto P en el cual la rapidez de la partícula es $3c$.

   b) Determine el radio de curvatura de la trayectoria en el punto P.

   c) Considerando que la partícula da 4 vueltas, estime la longitud total del espiral recorrido y determine el tiempo que le demoró. Le será de utilidad lo siguiente:

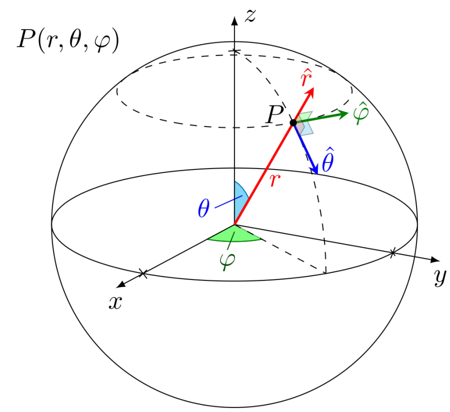
$$\int \sqrt{1+u^2}du = \frac{1}{2}(u\sqrt{1+u^2} + \sinh^{-1}(u)) + C$$

$$\frac{1}{2}(4\pi\sqrt{2+64\pi^2} + \sinh^{-1}(4\pi\sqrt{2})) \approx 160$$

3. **[Propuesto]** Considere un proyectil lanzado cerca de la superficie de la Tierra con rapidez inicial v_0 e inclinación inicial θ_0. Despreciando toda fuente de roce, calcule el radio de curvatura ρ_c de la trayectoria parabólica en el punto inicial $y = 0$ y cuando se alcanza la altura máxima h.

Coordenadas esféricas

El sistema de coordenadas esféricas se basa en la misma idea que las coordenadas polares y se utiliza para determinar la posición espacial de un punto mediante una distancia y dos ángulos. En consecuencia, un punto P queda representado por un conjunto de tres magnitudes: el radio r, el ángulo polar θ y el azimutal φ.



$$0 \leq r < \infty$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

La base coordenada de este sistema se puede relacionar con la base cartesiana mediante:

$$\hat{r} = \sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{x} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{y} + \cos(\theta)\hat{z}$$

$$\hat{\theta} = \cos(\theta)\cos(\varphi)\hat{x} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\hat{y} - \sin(\theta)\hat{z}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin(\varphi)\hat{x} + \cos(\varphi)\hat{y}$$

Inversamente:

$$\hat{x} = \sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{r} + \cos(\theta)\cos(\varphi)\hat{\theta} - \sin(\varphi)\hat{\varphi}$$

$$\hat{y} = \sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{r} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\hat{\theta} + \cos(\varphi)\hat{\varphi}$$

$$\hat{z} = \cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}$$

Las expresiones para posición, velocidad y aceleración están determinadas por:

$$\vec{r}(t) = r\hat{r}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\varphi}\sin(\theta)\hat{\varphi}$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2)\hat{\theta} + (r\sin(\theta)\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin(\theta) + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta))\hat{\varphi}$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}\right)\hat{\varphi}$$

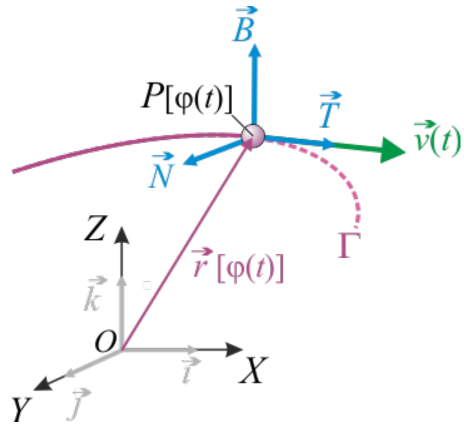
Coordenadas intrínsecas

Las coordenadas intrínsecas son un sistema de referencia que se define en relación con el movimiento propio del objeto, proporcionando un marco de referencia que sigue y se adapta al movimiento del mismo. La velocidad y aceleración estarán determinadas por:

$$\vec{v} = v\hat{t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_t\hat{t} + a_n\hat{n} = \dot{v}\hat{t} - \frac{v^2}{\rho_c}\hat{n}$$

Donde $\hat{t}$ y $\hat{n}$ son los vectores tangenciales y normales al movimiento, v la rapidez del objeto y ρ_c el radio de curvatura. Además se tiene:



$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \qquad \frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{\rho_c}\hat{n} \;\Rightarrow\; \dot{\hat{t}} = \frac{v}{\rho_c}\hat{n} \qquad \rho_c = \frac{v^3}{|\vec{v}\times\vec{a}|}$$

La rapidez también está determinada como la tasa de cambio de la distancia recorrida de la curva a través del tiempo, es decir, $v = \frac{ds}{dt}$. Esto permite encontrar la longitud recorrida en un tiempo arbitrario mediante:

$$L = \int_0^L ds = \int_0^t v dt$$