

FI2001-5 Mecánica**Profesor:** Claudio Romero.**Auxiliar:** Rodrigo Catalán, Joaquín Guzmán & Matías Urrea.**Ayudante:** Facundo Esquivel.

Auxiliar 6: Movimiento armónico forzado

2 de abril de 2025

1. Un oscilador armónico subamortiguado se ve afectado por una fuerza F tal que

$$F = F_0 e^{-at} \cos(\omega t + \theta).$$

- a) Encuentre una solución particular.
- b) ¿Cómo depende su velocidad final de θ y ω ?

Indicación: se simplifica el cálculo expresando $\cos(\omega t + \theta)$ en función de exponenciales complejas.

$$F = F_0 e^{-at} \cos(\omega t + \theta)$$

a) Encuentre z_p :

Utilizando la indicación $F = \operatorname{Re} \{ F_0 e^{-at} e^{i(\omega t + \theta)} \}$

$$\Rightarrow z_p = A e^{-at} e^{i(\omega t + \theta)} = A e^{(i\omega - a)t + \theta}$$

$$\text{Luego } \dot{z}_p = A(-a + i\omega) e^{-at + i(\omega t + \theta)}$$

$$\ddot{z}_p = A(-a + i\omega)^2 e^{-at + i(\omega t + \theta)}$$

Reemplazamos en la ecuación general

$$\ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{-at} e^{i(\omega t + \theta)}$$

$$A(-a + i\omega)^2 e^{-at} e^{i(\omega t + \theta)} + A(-a + i\omega) e^{-at} e^{i(\omega t + \theta)} \cdot 2\gamma + A e^{-at} e^{i(\omega t + \theta)} \cdot \omega_0^2 = \frac{F_0}{m} e^{-at} e^{i(\omega t + \theta)}$$

$$\Rightarrow A(-a + i\omega)^2 + A(-a + i\omega) \cdot 2\gamma + A\omega_0^2 = F_0/m$$

$$A(a^2 - 2i\omega a - \omega^2) + A(-a + i\omega) \cdot 2\gamma + A\omega_0^2 = F_0/m$$

$$A = \frac{F_0/m}{(a^2 - 2i\omega a + \omega^2) + (-a + i\omega)2\gamma + \omega_0^2}$$

Luego, reagrupamos

$$A = \frac{F_0/m}{(a^2 - \omega^2 - 2\gamma a + \omega_0^2) + i(2\gamma\omega - 2\gamma a)}$$

$$\text{Multiplicando por } \frac{(a^2 - \omega^2 - 2\gamma a + \omega_0^2) - i(2\gamma\omega - 2\gamma a)}{(a^2 - \omega^2 - 2\gamma a + \omega_0^2) - i(2\gamma\omega - 2\gamma a)}$$

$$A = \frac{F_0/m}{(a^2 - \omega^2 - 2\gamma a + \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega - 2\gamma a)^2} ((a^2 - \omega^2 - 2\gamma a + \omega_0^2) - i(2\gamma\omega - 2\gamma a))$$

$$\text{Luego } z_p = \operatorname{Re} \{ A \cdot e^{-at} e^{i(\omega t + \theta)} \}$$

$$z_p = \frac{(a^2 - \omega^2 - 2\gamma a + \omega_0^2) F_0}{(a^2 - \omega^2 - 2\gamma a + \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega - 2\gamma a)^2} \cdot e^{-at} \cos(\omega t + \theta)$$

b) La velocidad en $t \rightarrow \infty$ decae exponencialmente independiente de θ y ω , debido al término e^{-at} .

