P1 +6

a) Para calcular equilibrio sabemos por Newton

$$m\ddot{x} = 0 = F = -\frac{dU}{dx} \quad \text{si } F \text{ es conservativa}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_{eq}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{dU}{dx} = 2Ax\,e^{-(x/b)^2} + Ax^2 e^{-(x/b)^2} \cdot -2\left(\frac{x}{b}\right)\cdot\frac{1}{b}$$

$$= 2Axe^{-(x/b)^2} - \frac{2Ax^3 e^{-(x/b)^2}}{b^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dU}{dx} = 2Axe^{-(x/b)^2}\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)} \quad +0,5 \text{ Calcular derivada}$$

Imponemos condición de equilibrio

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_{eq}} = 0 \quad +1 \text{ condición de equilibrio}$$

$$2A\,x_{eq}\,e^{-(x/b)^2}\left(1 - \frac{x_{eq}^2}{b^2}\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 2A\,x_{eq}\,e^{-(x/b)^2} = 0 \quad \text{o} \quad 1 - \frac{x_{eq}^2}{b^2} = 0$$

$$x_{eq_1} = 0 \qquad x_{eq_2} = b \qquad x_{eq_3} = -b$$

$\therefore$ $x = 0$; $x = b$; $x = -b$ ptos. de equilibrio

+0,3 +0,3 +0,3

(0,3 por cada pto. de eq.)

Ahora vamos a ver que tipo de estabilidad tiene cada uno

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 2A\,e^{-(x/b)^2}\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) + 2Ax\,e^{-(x/b)^2}\cdot\frac{-2x}{b^2}\left(-\frac{x^2}{b^2}\right)$$

$$+ 2Ax\,e^{-(x/b)^2}\cdot\frac{-2x}{b^2}$$

$$= 2A\,e^{-(x/b)^2}\left[-\frac{x^2}{b^2} - 2\frac{x^2}{b^2}\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) - \frac{2x^2}{b^2}\right]$$

$$= 2A\,e^{-(x/b)^2}\left[-\frac{x^2}{b^2} - \frac{2x^2}{b^2} + 2\frac{x^4}{b^4} - \frac{2x^2}{b^2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d^2U}{dx^2} = 2A\,e^{-(x/b)^2}\left(-1 + \frac{2x^4}{b^4} - 5\frac{x^2}{b^2}\right)$$ +0,5 Calcular 2da derivada

Evaluando en los puntos de equilibrio

① $\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} = 2A > 0 \Rightarrow$ pto. de equilibrio estable +0,3

② $\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=b} = 2A\,e^{-1}(-1+2-5)$

$= -4A\,e^{-1} < 0 \Rightarrow$ pto. de equilibrio inestable +0,3

③ $\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=-b} = 2A\,e^{-1}(-1+2-5) < 0 \Rightarrow$ inestable +0,3

Para el equilibrio estable sabemos que

$$\omega^2 = \frac{\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0}}{m} = \frac{2A}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2A}{m}}$$ +0,2

4 / 4

P2)

a) Por Newton

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x} \qquad +0,3$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + kx = 0 \qquad \text{suponemos solución } x = e^{at}$$

$$(e^{at})'' + \frac{\lambda}{m}(e^{at})' + \frac{k}{m}e^{at} = 0$$

$$a^2 e^{at} + \frac{\lambda}{m} a e^{at} + \frac{k}{m} e^{at} = 0 \qquad / \div e^{at}$$

$$a^2 + \frac{\lambda}{m} a + \frac{k}{m} = 0 \qquad +0,3$$

y por solución de la cuadrática tenemos que

$$a = \frac{-\lambda/m \pm \sqrt{(\lambda/m)^2 - 4k/m}}{2} \qquad +0,4$$

$$\Rightarrow a = -\lambda/2m \pm \sqrt{(\lambda/2m)^2 - k/m}$$

y como $(\lambda/2m)^2 > k/m$ la raíz no es negativa, hay soluciones reales

+0,2

$$a_1 = -\lambda/2m + \sqrt{(\lambda/2m)^2 - k/m} = -\left(\lambda/2m - \sqrt{(\lambda/2m)^2 - k/m}\right)$$

notar que $a_1 < 0$ ya que $\frac{\lambda}{2m} > \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$

$$a_2 = -\lambda/2m - \sqrt{(\lambda/2m)^2 - k/m} = -\left(\lambda/2m + \sqrt{(\lambda/2m)^2 - k/m}\right)$$

notar que a $a_2 < 0$

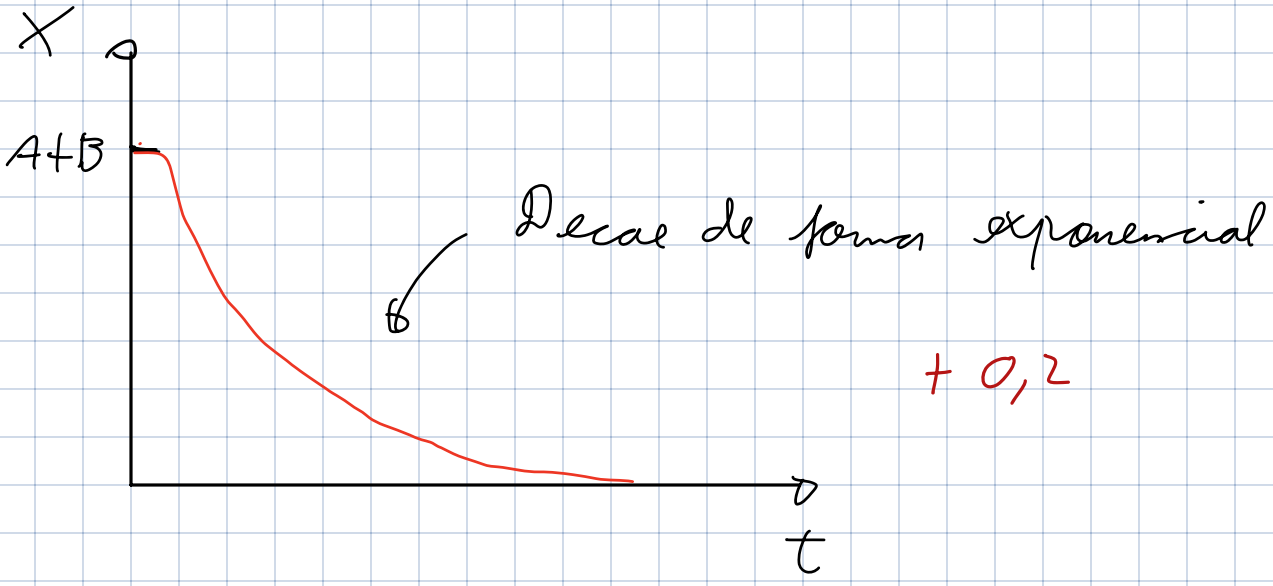
Su solución general viene siendo

$$x(t) = A e^{-\left(\lambda/2m - \sqrt{(\lambda/2m)^2 - k/m}\right)t} + B e^{-\left(\lambda/2m + \sqrt{(\lambda/2m)^2 - k/m}\right)t} \qquad +0,3$$

b) Los dos exponenciales decaen con $t \to \infty$ +0,3

$\Rightarrow$ $t \to \infty$ $\Rightarrow$ $x \to 0$

* Es importante saber que las constantes encerradas en rojo sean positivas, de lo contrario x no tendería a 0 con $t \to \infty$



+ 0,2