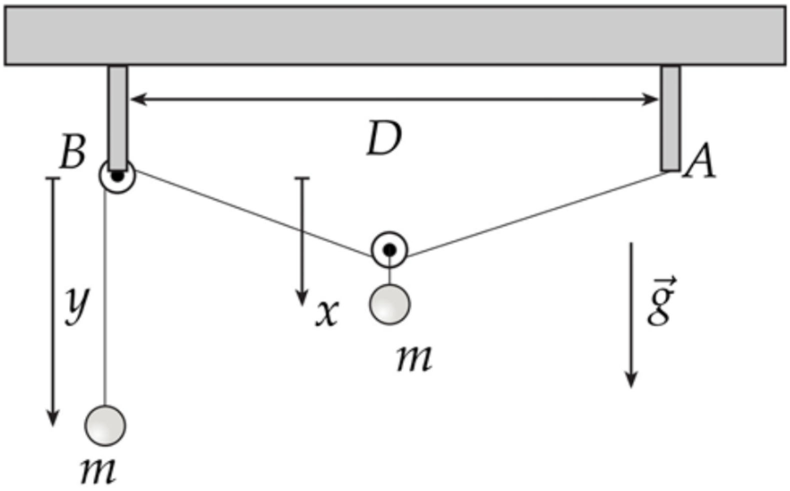
1. Un hilo de largo L que está sujeto a un punto A, pasa por una masa libre m (puede deslizar por el hilo sin roce), luego por una polea fija B y termina vertical, teniendo en su otro extremo otra partícula de masa m. La parte vertical del hilo tiene un largo y variable, como se muestra en la figura. La masa libre se mantiene siempre equidistante (horizontalmente) de los puntos A y B (separados por una distancia D), pero puede subir o bajar, de modo que los tres puntos siempre forman un triángulo isósceles.



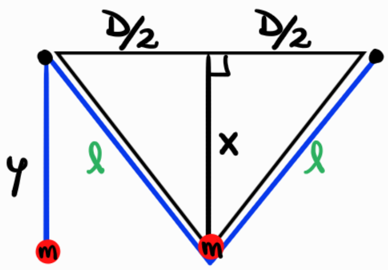
a) Obtenga una relación entre la posición vertical y de la masa de la izquierda y la posición vertical x de la masa central para luego obtener la energía potencial asociada a este sistema.

b) Obtenga valor(es) de x para posición(es) de equilibrio, y describa su estabilidad.

c) Escriba la energía cinética K del sistema en función de x y $\dot{x}$.

d) Obtenga una expresión aproximada para K en torno a la(s) posición(es) de equilibrio y calcule la(s) frecuencia(s) de pequeñas oscilaciones.

a) Para obtener la relación entre las posiciones verticales x e y de las masas, vemos las relaciones geométricas presentes en la figura:



$$\ell^2 = x^2 + D^2/4 \rightarrow \ell = \tfrac{1}{2}\sqrt{4x^2 + D^2}$$

$$L = y + 2\ell \rightarrow L = y + \sqrt{4x^2 + D^2}$$

$$\therefore y = L - \sqrt{4x^2 + D^2}$$

La energía potencial del sistema corresponderá al potencial gravitario de cada una de las masas, es decir:

$$U(x,y) = -mgx - mgy \rightarrow U(x) = -mg(x + L - \sqrt{4x^2 + D^2})$$

b) Los puntos de equilibrio **estables** se encontrarán en los mínimos del potencial, donde $U'(x_{eq})=0$ y $U''(x_{eq})>0$.

$$U'(x) = \frac{dU}{dx} = \frac{d}{dx}(-mg(x + L - \sqrt{4x^2 + D^2})) = -mg\left(1 - \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + D^2}}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{4x}{\sqrt{4x^2+D^2}} = 1$$

$$\sqrt{4x^2+D^2} = 4x$$

$$4x^2 + D^2 = 16x^2$$

$$12x^2 = D^2$$

$$x_{eq} = \pm \frac{D}{2\sqrt{3}}$$

Analizando ahora la estabilidad:

$$U''(x) = \frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-mg\left(1 - \frac{4x}{\sqrt{4x^2+D^2}}\right)\right) = \frac{4mgD^2}{(4x^2+D^2)^{3/2}}$$

$$U''(x_{eq}) = \frac{4mgD^2}{(4\cdot D^2/12 + D^2)^{3/2}} = \frac{4mgD^2}{(4D^2/3)^{3/2}} = \frac{3\sqrt{3}}{8D^3}\cdot 4mgD^2 = \frac{3\sqrt{3}\,mg}{2D} > 0$$

De esta forma, ambos puntos de equilibrio son estables, pero por la forma en que se definió el problema, asumimos que x siempre será positivo, y así el punto de equilibrio estable es:

$$x_{eq} = \frac{D}{2\sqrt{3}}$$

c) La energía cinética, de manera análoga a lo ocurrido con el potencial, será la suma de las correspondientes a cada masa:

$$K(x,y) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{d}{dt}(L - \sqrt{4x^2+D^2})^2\right)$$

$$K(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{16x^2\dot{x}^2}{4x^2+D^2}\right) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(\frac{20x^2+D^2}{4x^2+D^2}\right)$$

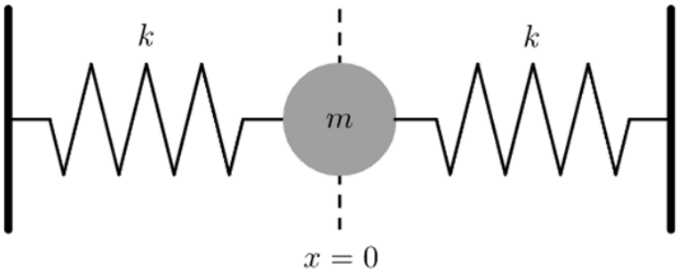
d) Se evalúa la expresión anterior en el punto de equilibrio:

$$K(x = x_{eq}, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(\frac{20\cdot D^2/12 + D^2}{4\cdot D^2/12 + D^2}\right) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(\frac{8D^2/3}{4D^2/3}\right) = m\dot{x}^2$$

Por otra parte, la frecuencia de pequeñas oscilaciones estará dada por la siguiente expresión:

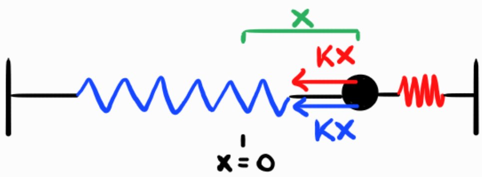
$$\omega_{p.o} = \sqrt{\frac{U''(x_{eq})}{m}} \quad \rightarrow \quad \omega_{p.o} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}\,g}{2D}}$$

2. Dos resortes idénticos de constante elástica k, que se encuentran en su largo natural, están unidos a una masa m inicialmente en reposo, la cual está restringida a oscilar en la dirección horizontal.



Luego el sistema es perturbado, donde la masa comienza a oscilar con movimiento armónico simple en torno a la posición de equilibrio, con una amplitud d. En el instante en que la masa pasa por la posición $x = d/2$ moviéndose hacia la derecha, el resorte derecho es retirado. Encuentre $x(t)$ después de que el resorte de la derecha es retirado, determinando explícitamente la amplitud, la fase y la frecuencia angular de la nueva oscilación.

La oscilación previa a retiramiento del resorte derecho determinará las condiciones iniciales del movimiento posterior. Por esto, se analiza la situación inicial, donde la ecuación de movimiento será:



$$m\vec{a} = \sum \vec{F} \rightarrow ma = -Kx - Kx$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{2K}{m}}_{\omega_1^2} x = 0 \quad \text{MAS} \qquad \therefore \omega_1 = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

Al tener la ecuación del MAS y conocer la amplitud de la oscilación (d) por enunuciado, se tiene la posición de la partícula:

$$x_1(t) = d\cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

Al conocer la posición inicial (x=0), se puede obtener la fase:

$$x_1(t=0) = d\cos(\phi_1) = 0 \rightarrow \phi_1 = -\pi/2$$

$$x_1(t) = d\cos(\omega_1 t - \pi/2) = d\sin(\omega t)$$

Con esto, es posible obtener la velocidad y el momento en que se quita el resorte (cuando x=d/2):

$$v_1(t) = \frac{dx}{dt} = \omega_1 d\cos(\omega t)$$

$$x_1(t = t^*) = d\sin(\omega_1 t^*) = d/2 \rightarrow t^* = \frac{\arcsin(1/2)}{\omega_1}$$

$$v_1(t = t^*) = \omega_1 d\cos\left(\omega_1 \cdot \frac{\arcsin(1/2)}{\omega_1}\right) = \frac{\sqrt{3}\,\omega_1 d}{2} > 0$$

pues se mueve a la derecha

Una vez se quita el resorte, la nueva ecuación de movimiento será:

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{K}{m}}_{\omega_2^2} x = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$x_2(t) = A\cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad \wedge \quad v_2(t) = -A\omega_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

A partir de la información anterior, se obtiene lo pedido:

$$x_2(t=0) = A\cos(\phi_2) = \frac{d}{2}$$

$$v_2(t=0) = -A\omega_2 \sin(\phi_2) = \frac{\sqrt{3}\,\omega_1 d}{2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\sin(\phi_2) = -\frac{\sqrt{3}\,\omega_1 d}{2A\omega_2} \quad \wedge \quad \cos(\phi_2) = \frac{d}{2A}$$

$$\tan(\phi_2) = -\sqrt{3}\,\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\sqrt{6}$$

$$\phi_2 = -\arctan(\sqrt{6})$$

$$A = \frac{d}{2\cos(\arctan(-\sqrt{6}))} = \frac{\sqrt{7}}{2} d$$

$$\therefore\ x_2(t) = \frac{\sqrt{7}}{2} d \cos(\omega_2 t - \arctan(\sqrt{6}))$$