1. Una partícula de masa m, que está en reposo en $t = 0$, es sometida a una fuerza de la forma:

$$F(t) = F_0 \sin^2(\omega t)$$

Encuentre $v(t)$ y $x(t)$, y verifique que los resultados concuerdan con un análisis cualitativo.

Se plantea la segunda Ley de Newton teniendo en cuenta la única fuerza a la que está sometida la partícula:

$$ma(t) = F_0 \sin^2(\omega t) \qquad +0{,}5 \quad \text{2da ley de Newton}$$

Se escribe la aceleración como la derivada temporal de la velocidad:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{m}\sin^2(\omega t) \qquad +0{,}5 \quad a = \frac{dv}{dt}$$

Para resolver la EDO, se considera lo siguiente:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \wedge \quad \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x) \qquad \text{Indicaciones}$$

$$\cos(2x) = (1 - \sin^2(x)) - \sin^2(x)$$

$$\cos(2x) - 1 = -\sin^2(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad +0{,}5$$

Reemplazando y resolviendo:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{m}\left(\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\right) \quad \Big/ \int_0^t dt \qquad +0{,}2 \quad \text{Integral en dt}$$

$$\int_{v=0}^{v(t)} dv = \frac{F_0}{2m}\left(\int_0^t dt - \int_0^t \cos(2\omega t)\,dt\right) \qquad +0{,}3 \quad \text{cambio de variable } v(t)$$

$$v(t) = \frac{F_0}{2m}\left(t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}\Big|_0^t\right) \qquad +0{,}2 \quad \text{Resultados integrales}$$

$$v(t) = \frac{F_0}{2m}\left(t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}\right) \qquad +0{,}3 \quad \text{Expresión } v(t)$$

De igual forma para la posición, se resuelve la EDO anterior planteando la velocidad como la derivada temporal de la misma:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{2m}\left(t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}\right) \quad \Big/ \int_0^t dt \qquad +0{,}2 \quad \text{Integral en dt}$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \frac{F_0}{2m}\left(\int_0^t t\,dt - \frac{1}{2\omega}\int_0^t \sin(2\omega t)\,dt\right) \qquad +0{,}3 \quad \text{cambio de variable } x(t)$$

$$x(t) - x_0 = \frac{F_0}{4m}\left(t^2 + \frac{\cos(2\omega t)}{2\omega^2}\Big|_0^t\right) \qquad +0{,}2 \quad \text{Resultados integrales}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{F_0}{4m}\left(t^2 + \frac{\cos(2wt) - 1}{2w^2}\right)$$ +0,3 Expresión x(t)

La partícula, al estar sometida a una fuerza siempre positiva, experimenta una aceleración constante en la misma dirección, lo que provoca un crecimiento lineal de la velocidad y cuadrático de la posición. Las oscilaciones en ambas variables surgen de la periodicidad de la fuerza y se superponen a este comportamiento general.

+ 0,5 comportamiento general
+ 0,5 comportamiento oscilatorio

2. Una partícula de masa m está sometida a una fuerza cuya energía potencial asociada está dada por:

$$U(x) = ax^2 - bx^3$$

Obtenga la expresión de la fuerza.

La relación entre una fuerza conservativa y su potencial asociado, en el caso unidimensional, viene dada por:

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x}$$ + 0,5 relación $\vec{F}$ y U

Utilizando el potencial dado, la fuerza será:

$$\vec{F} = -\frac{\partial}{\partial x}(ax^2 - bx^3)\hat{x}$$

$$\vec{F} = (-2ax + 3bx^2)\hat{x}$$ + 1 Expresión fuerza