1. Una masa m se desplaza en una dimensión sometida a una fuerza viscosa. La partícula parte con velocidad inicial v_0 en el punto $x_0 = 0$ en $t = 0$.

   a) Demuestre que la masa se desplaza una distancia finita antes de detenerse cuando la fuerza viscosa es $F = -bv$.

   b) Demuestre que la masa nunca se detiene cuando la fuerza viscosa es $F = -cv^2$.

<u>*Hint:*</u> Utilice la relación

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

a) Siempre que queramos analizar el movimiento de una partícula teniendo información sobre las fuerzas a las que está sometida, planteamos la segunda Ley de Newton:

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}$$

Al ser un movimiento unidimensional, se tendrá lo siguiente:

$$\vec{x}(t) = x \qquad \vec{v}(t) = \dot{x} \qquad \vec{a}(t) = \ddot{x}$$

Sabiendo que la única fuerza involucrada es la viscosa descrita en el enunciado, lo anterior queda:

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} \quad \leftrightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x}$$

Para resolver la EDO, utilizamos el hint:

$$\cancel{\dot{x}}\frac{dv}{dx} = -\frac{b}{m}\cancel{\dot{x}} \qquad / \int_{x=0}^{x} dx$$

Se integra desde la posición inicial hasta una cualquiera.

$$\int_{v=v_0}^{v} dv = -\frac{b}{m}\int_{x=0}^{x} dx$$

$$v - v_0 = -\frac{b}{m}x$$

La partícula se detiene cuando v=0. Vemos la distancia recorrida hasta ese instante:

$$\cancel{v} - v_0 = -\frac{b}{m}x$$

$$x = \frac{mv_0}{b}$$

De esta forma, la distancia recorrida hasta detenerse es finita.

b) Vemos ahora la segunda Ley de Newton con la nueva fuerza viscosa:

$$m\ddot{x} = -cv^2 \leftrightarrow \ddot{x} = -\frac{c}{m}v^2$$

Usamos nuevamente el hint para resolver la EDO:

$$\cancel{v}\frac{dv}{dx} = -\frac{c}{m}v^{\cancel{2}} \quad \text{Variable separable}$$

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = -\frac{c}{m} \quad / \int_{x=0}^{x} dx$$

$$\int_{v=v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\frac{c}{m}\int_{x=0}^{x} dx$$

$$\ln(v/v_0) = -\frac{c}{m}x \quad / \exp()$$

$$v = v_0 e^{-\frac{c}{m}x}$$

Como $v_0>0$ y $\exp(\cdot)>0$, $v(x)>0$ y así la partícula nunca se detiene.

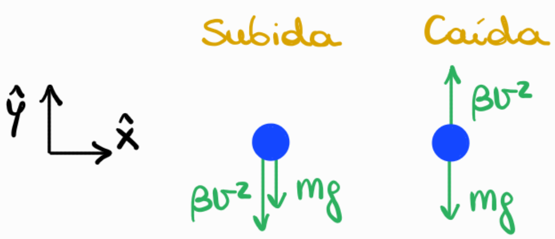
2. Una pelota de masa m es lanzada verticalmente con velocidad inicial v_i. Si la resistencia del aire es proporcional a v^2 y la velocidad terminal es v_t, demuestre que la pelota vuelve a su posición inicial con velocidad v_f dada por:

$$\frac{1}{v_f^2} = \frac{1}{v_i^2} + \frac{1}{v_t^2}$$

Se pide una expresión para la velocidad final en función de la inicial y la terminal. Para esto es conveniente encontrar la ecuación de movimiento que describa la velocidad de la pelota, con la que podremos obtener relaciones entre los datos del enunciado.

Se plantea la segunda Ley de Newton teniendo en cuenta las fuerzas que interactúan con la pelota (gravedad y roce del aire):

* Se dice que la velocidad es proporcional a v^2 → $\vec{F}_{aire} = \beta v^2$ (En la dirección que se opone al movimiento)



Subida) $ma(t) = -mg - \beta v^2(t)$

Caída) $ma(t) = -mg + \beta v^2(t)$

La velocidad terminal corresponde a aquella que alcanza el objeto cuando la fuerza de resistencia que opone el medio (en este caso el aire) está en equilibrio con la gravedad. Esto implica que la aceleración del objeto es nula obteniendo así la siguiente relación:

$$m\cancel{a(t)}^{0} = -mg + \beta v_t^2 \quad \rightarrow \quad v_t^2 = \frac{mg}{\beta}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, que la aceleración corresponde a la derivada temporal de la velocidad, y que esta a su vez es la derivada temporal de la posición, vemos cada caso por separado:

Subida)

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \beta v^2 \rightarrow \frac{dv}{dt} = -g - g \cdot \underbrace{\frac{\beta}{mg}}_{\rightarrow 1/v_t^2} v^2$$

$$\frac{dv}{dt} = -g\left(1+\frac{v^2}{v_t^2}\right) \rightarrow \underbrace{\frac{dv}{dy}}_{\text{posición} \rightarrow}\cancel{\frac{dy}{dt}}^{v} = -g\left(1+\frac{v^2}{v_t^2}\right) \Big/ \int_{y=0}^{y} dy$$

$$\int_{v_i}^{v(t)} \frac{v\,dv}{\left(1+\frac{v^2}{v_t^2}\right)} = -g\int_0^y dy \qquad u = 1 + v^2/v_t^2 \rightarrow du = 2v/v_t^2\, dv \rightarrow v\,dv = \frac{1}{2}v_t^2\, du$$

* Cuando $y = 0$, la velocidad es v_i, mientras que para una altura cualquiera será $v(t)$, pero sólo hasta que deje de subir, esto es, $y = y_{max} \rightarrow v(t) = 0$.

$$\int_{1+v_i^2/v_t^2}^{1+v^2/v_t^2} \frac{1}{2}v_t^2 \cdot \frac{du}{u} = -gy$$

$$\ln\left(\frac{1+v^2/v_t^2}{1+v_i^2/v_t^2}\right) = -\frac{2g}{v_t^2}y \rightarrow \frac{1+v^2/v_t^2}{1+v_i^2/v_t^2} = e^{-\frac{2g}{v_t^2}y}$$

Evaluando en la altura máxima (v(t) = 0) se tiene:

$$\frac{1}{1+v_i^2/v_t^2} = e^{-\frac{2g}{v_t^2}y_{max}}$$

Caída)

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + \beta v^2 \rightarrow \frac{dv}{dt} = -g + g \cdot \underbrace{\frac{\beta}{mg}}_{\rightarrow 1/v_t^2} v^2$$

$$\frac{dv}{dt} = -g\left(1-\frac{v^2}{v_t^2}\right) \rightarrow \underbrace{\frac{dv}{dy}}_{\text{posición} \rightarrow}\cancel{\frac{dy}{dt}}^{v} = -g\left(1-\frac{v^2}{v_t^2}\right) \Big/ \int_{y_{max} \rightarrow v=0}^{0 \rightarrow v = v_f} dy$$

$$\int_0^{v_f} \frac{v\,dv}{\left(1-\frac{v^2}{v_t^2}\right)} = -g\int_{y_{max}}^0 dy \qquad u = 1 - v^2/v_t^2 \rightarrow du = -2v/v_t^2\, dv \rightarrow v\,dv = -\frac{1}{2}v_t^2\, du$$

$$\int_1^{1-v_f^2/v_i^2} -\frac{1}{2} v_t^2 \cdot \frac{du}{u} = g y_{max} \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{1-v_f^2/v_t^2}{1}\right) = -\frac{2g}{v_t^2} y_{max}$$

$$1 - v_f^2/v_t^2 = e^{-\frac{2g}{v_t^2} y_{max}}$$

reemplazo

$$1 - v_f^2/v_t^2 = \frac{1}{1+v_i^2/v_t^2} \quad \rightarrow \quad \left(1-\frac{v_f^2}{v_t^2}\right)\left(1+\frac{v_i^2}{v_t^2}\right) = 1$$

$$\cancel{1} + \frac{v_i^2}{v_t^2} - \frac{v_f^2}{v_t^2} - \frac{v_f^2 v_i^2}{v_t^4} = \cancel{1} \quad / \cdot \frac{v_t^2}{v_f^2 v_i^2}$$

$$\frac{1}{v_f^2} - \frac{1}{v_i^2} - \frac{1}{v_t^2} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{v_f^2} = \frac{1}{v_i^2} + \frac{1}{v_t^2}$$