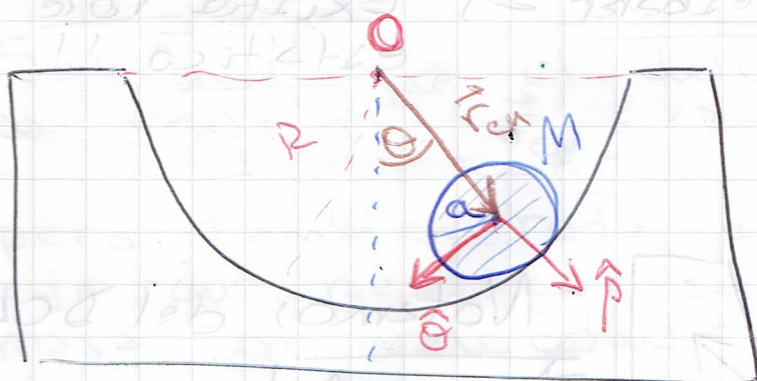


Problem 1



- a) De la figura notamos que, dadas las coordenadas polares $\hat{\rho}, \hat{\theta}$ el centro de masa del disco es

$$\vec{r}_{cm} = (R-a)\hat{\rho}$$

entonces la velocidad

$$\vec{v}_{cm} = (R-a)\dot{\theta}\hat{\theta}$$

luego la aceleración

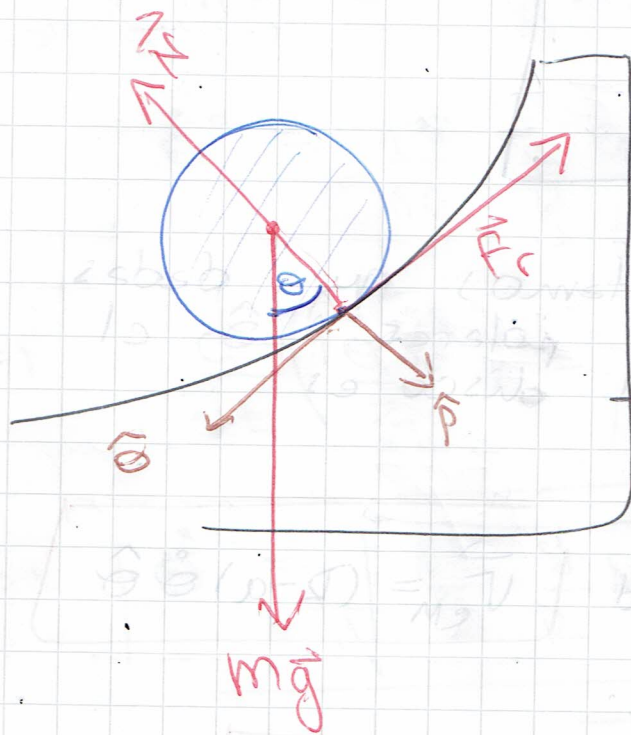
$$\vec{a}_{cm} = (R-a)\ddot{\theta}\hat{\theta} - (R-a)\dot{\theta}^2\hat{\rho}$$

Ahora, buscamos las ecuaciones de movimiento del centro de masa, esto es

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$$

Hagamos un DCL, nos dice el enunciado que ruede sin resbalar $\Rightarrow$ Exista roce estático !!

$\Rightarrow$ Tenemos



Notamos del DCL

$$\vec{N} = -N \hat{p}$$

$$\vec{F}_r = -f_r \hat{e}$$

$$\vec{Mg} = Mg \sin \theta \hat{e} + Mg \cos \theta \hat{p}$$

Así con las fuerzas dadas y $\vec{a}_{cm}$ dado tenemos desde $\sum \vec{F}_{ext} = M \vec{a}_{cm}$

$$\hat{p} \quad -N + Mg \cos \theta = -(R-a) M \ddot{\theta}$$

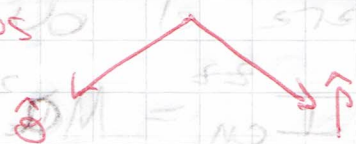
$$\hat{e} \quad -f_r + Mg \sin \theta = M(R-a) \ddot{\theta}$$

(b) Hagamos esto con Euler-Lagrange.

Sabemos que el disco se traslada con velocidad $\vec{v}_{cm} = (R-a) \dot{\theta} \hat{\theta}$

pero también rota en torno al eje que pasa por su centro de masa con velocidad angular $\vec{\omega} = -\omega \hat{z}$

(Notar que definimos



entonces $+z$ apunta hacia adentro)

¿Cómo se relacionan ω y v_{cm} ?

Rueda sin resbalar.

$$\Rightarrow a\omega = v_{cm} \Rightarrow \omega = \frac{(R-a) \dot{\theta}}{a}$$

Luego la energía cinética del disco es

$$K = K_{\text{Transl}} + K_{\text{Rot}}$$

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

así tenemos con $I_{cm} = \frac{Ma^2}{2}$

Comentario: Formalmente deberíamos hacer para la componente rotacional

$$K^{ROT} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I \vec{\omega}$$

pero para el disco pueden mostrar que

$$I_{cm}^{zz} = \frac{Ma^2}{2}, \text{ con } a: \text{radio del disco.}$$

y como tenemos $\vec{\omega} = -\omega \hat{z}$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix}$$

→ 3 tres puestas

$$\vec{\omega}^T = (0 \ 0 \ -\omega)$$

Entonces

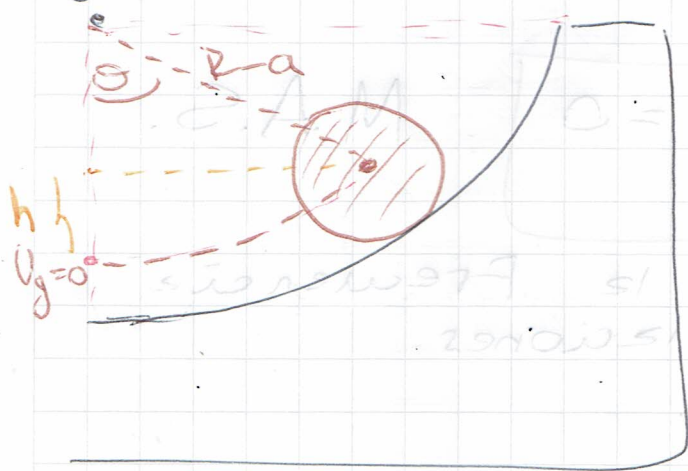
$$K^{ROT} = \frac{1}{2} (0 \ 0 \ -\omega) I_{is} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} \Rightarrow \text{solo contribuye } I_{zz}$$

$$\Rightarrow K^{ROT} = \frac{1}{2} I_{zz} \omega^2$$

$$\rightarrow K = \frac{3}{4} M (R-a)^2 \dot{\theta}^2$$

Por otra parte, la energía potencial.

0



$$\rightarrow h = (R-a) - (R-a) \cos \theta$$

$$h = (R-a)(1 - \cos \theta)$$

$$\rightarrow U = Mg(R-a)(1 - \cos \theta)$$

Así tenemos el Lagrangiano.

$$L = \frac{3}{4} M (R-a)^2 \dot{\theta}^2 - Mg(R-a)(1 - \cos \theta)$$

luego el equilibrio es cuando $\theta = 0$

$\rightarrow$ ecuación de movimiento.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3M(R-a)^2}{2} \ddot{\theta} + Mg(R-a) \sin \theta = 0$$

pequeñas oscilaciones $\Rightarrow \sin \theta \approx \theta$

y tenemos

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-a)} \theta = 0 \quad \text{M.A.S.}$$

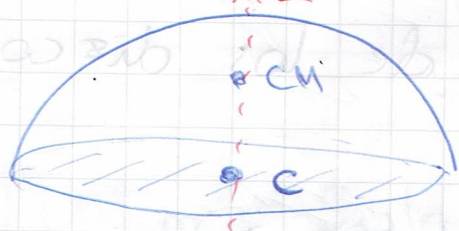
Así encontramos la frecuencia de pequeñas oscilaciones

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R-a)}}$$

Problema 2

a) Buscamos $\vec{r}_{cm}$.

Veamos la semiesfera acortada.



$$\Rightarrow |\vec{r}_{cm}| = ?$$

Buscamos respecto a C.

Notar que esta semiesfera se puede considerar como discos infinitesimales de espesor dz y radio $r(z)$.



Sabemos que el CM de cada disco pasa por su centro $\Rightarrow$ en el eje de C.

$$\Rightarrow \vec{r}_{cm} = z \hat{z}_{cm}$$

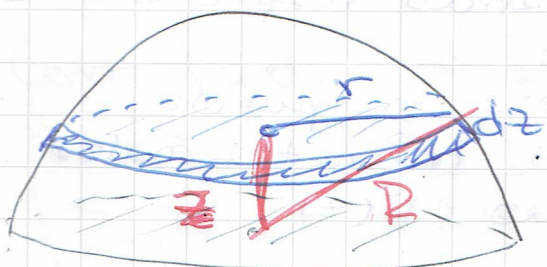
Luego de $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int dm (\vec{r})$ apunta al elemento infinitesimal el CM de cada disco!

$$z \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{cm} = \left[\frac{1}{M} \int dm z \right] \hat{z}$$

ahora $dm = \rho dV$ pero $dV = ?$

¿Cuál es el Volumen dV de los discos de espesor dz



$$\Rightarrow dV = \pi r^2 dz$$

$$\text{pero } r^2 = R^2 - z^2$$

$$\Rightarrow dV = \pi (R^2 - z^2) dz, \quad z \in [0, R]$$

Así tenemos:

$$\vec{F}_{cm} = \left[\frac{\rho}{M} \int_0^R dz \pi (R^2 - z^2) z \right] \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{cm} = \frac{\rho \pi}{M} \left(R^2 \int_0^R dz z - \int_0^R dz z^3 \right) \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{cm} = \frac{\pi \rho}{M} \cdot \frac{R^4}{4} \hat{z}$$

TR 5

Finalmente con $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{(\frac{2}{3}\pi R^3)}$
se tiene

$$\vec{F}_{cm} = \frac{3R}{8} \hat{z}$$

b) Usemos Euler-Lagrange!!

Sabemos que la energía cinética es:

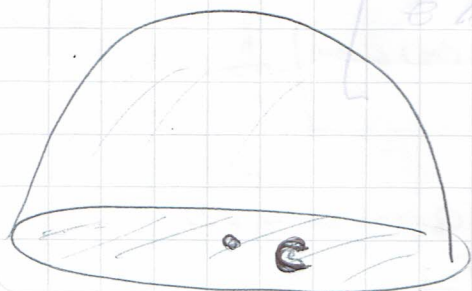
$$K = \frac{1}{2} \left(I_{cm} + M \left(\frac{3R}{8} \right)^2 \right) \dot{\theta}^2$$

$$I_{cm} = ??$$

Calculamos $I_c \Rightarrow$ Sabemos que justamente

$$I_c = I_{cm} + M \left(\frac{3R}{8} \right)^2$$

Veamos I_c :



$\Rightarrow$ Usamos coords. esféricas
 $\Rightarrow$ $\left. \begin{array}{l} r \in [0, R] \\ \theta \in [0, \pi/2] \\ \phi \in [0, 2\pi] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Límites} \\ \text{de} \\ \text{integración} \end{array}$

Luego $I_c = \int_V dm \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2+x^2 & -yz \\ -xz & -yz & y^2+z^2 \end{bmatrix}$

con $dm = \rho dV$; en esféricos $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

densidad
Volumetrica
(constante)

elemento de
Volumen.

Veamos por ejemplo la componente I_{xx}^c

$\rightarrow y^2+z^2 = r^2 \sin^2\theta \cos^2\phi + r^2 \cos^2\theta$

donde usamos el cambio

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\phi \\ y = r \sin\theta \sin\phi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

Entonces I_{xx}^c será:

$$I_{xx}^c = \rho \left[\int_0^R dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^4 \sin^3\theta \cos^2\phi + \int_0^R dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^4 \sin\theta \cos^2\theta \right]$$

con $\{r, \theta, \varphi\}$ Variables independientes
entonces

$$I_{xx}^c = \rho \left[\int_0^R dr r^4 \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^3 \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi + \right. \\ \left. + \int_0^R dr r^4 \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos^3 \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right]$$

Veamos los integrales que nos aparecen:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1 - \cos(2\varphi)}{2} \right) = \frac{1}{2} \left[\int_0^{2\pi} d\varphi - \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(2\varphi) \right]$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi = \pi$$

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \sin^3 \theta ; \text{ Con propiedad } \sin^3 \theta = \frac{3\sin \theta - \sin(3\theta)}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^3 \theta = \frac{1}{4} \left[3 \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta - \int_0^{\pi/2} d\theta \sin(3\theta) \right] \\ = \frac{1}{4} \left[-3 \cos \theta \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{3} \cos(3\theta) \Big|_0^{\pi/2} \right]$$

$\Rightarrow$ evaluamos y tenemos

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta = \frac{2}{3}$$

Tarea: Mostrar que $\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$

Tenemos todas las integrales con
 $\int_0^R dr r^4 = \frac{R^5}{5}$ entonces reemplazamos
 y tenemos:

$$I_{xx}^c = A \left[\frac{R^5}{5} \cdot \frac{2}{3} \pi + \frac{R^5}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\pi \right]$$

$$\text{con } A = \frac{M}{\left(\frac{2}{3}\pi R^3\right)} \Rightarrow A = \frac{3M}{2\pi R^3}$$

se tiene

$$I_c^{xx} = \frac{2}{5} MR^2$$

Tarea: Mostrar que I^c es diagonal.

Corrección: Acé habías puesto I_c pero era I_c^{xx} : Nuestro sistema rota en torno al eje "x" por eso lo necesitamos.

Tenemos entonces

$$I_c = \frac{2}{5} MR^2$$

ocurre lo mismo con $I_c^{yy} \wedge I_c^{zz} = I_{cm}$ el resto todo nulo.

y notar que justamente

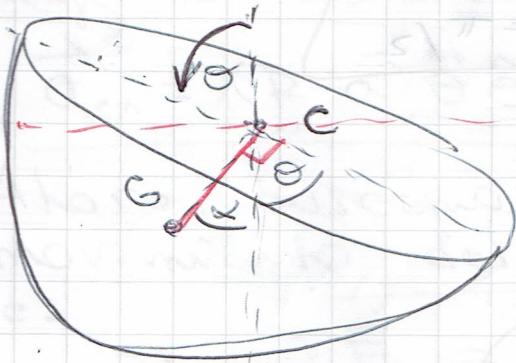
$$I_c^{xx} = I_{cm} + M \left(\frac{3R}{8} \right)^2$$

entonces la energía cinética

$$K = \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{2}{5} \dot{\theta}^2$$

ya que $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{z}$ y la energía cinética es tipo $\vec{\omega}^T I \vec{\omega}$ si $\vec{\omega} = \omega_z \hat{z}$
 $\Rightarrow \vec{\omega}^T I \vec{\omega} = \omega_z I_{zz} \omega_z$
 $= I_{zz} \omega_z^2$
 $= I_{zz} \dot{\theta}^2$

En. Potencial.



$$U_g = 0$$

=> Notamos que

$$U_g = - \left| \frac{3R}{8} \cos \alpha \right| g M$$

$$\text{con } \alpha = \pi/2 - \theta$$

$$\Rightarrow U_g = - \frac{3}{8} mgR \sin \theta$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{2}{5} \dot{\theta}^2 + \frac{3}{8} mgR \sin \theta$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\theta}} \right) - \frac{d\mathcal{L}}{d\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} mR^2 \ddot{\theta} - \frac{3}{8} mgR \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{15}{16} \frac{g}{R} \cos \theta \quad | \cdot \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{15}{16} \frac{g}{R} \sin \theta \right)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{15}{8} \frac{g}{R} \sin \theta}$$

Se desprege en $\theta = \pi/2$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{15}{8} \frac{g}{R}}$$

$$\Rightarrow V_{cm} = \left(\frac{3}{8} R \right) \cdot \dot{\theta}$$