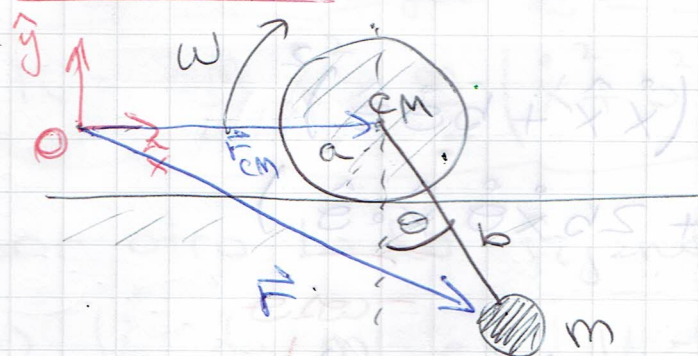


Problema 1



a) Desde O tenemos $\vec{r} = \vec{r}_{cm} + \vec{r}'$

con $\vec{r}'$ medido desde el centro de masa.

Entonces la posición de m es, usando cor. polares para $\vec{r}'$,

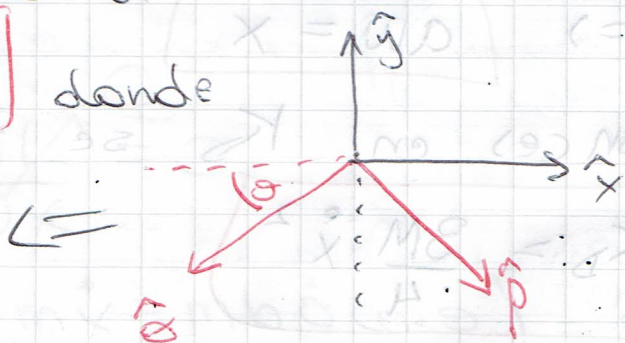
$$\vec{r} = x \hat{x} + b \hat{\rho}$$

$$\underbrace{x}_{\vec{r}_{cm}} \underbrace{\hat{x}}_{\hat{r}'}$$

luego la velocidad de m es

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x} \hat{x} + b \dot{\theta} \hat{e} \quad \text{donde}$$

$$\hat{e} = -\cos\theta \hat{x} - \sin\theta \hat{y}$$



Tenemos así la energía cinética de la masa m

$$K_m = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{x} \hat{x} + b \dot{\theta} \hat{\theta})^2$$

$$\Rightarrow K_m = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + b^2 \dot{\theta}^2 + 2b \dot{x} \dot{\theta} \underbrace{\hat{x} \cdot \hat{\theta}}_{-\cos\theta})$$

$$K_m = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + b^2 \dot{\theta}^2 - 2b \dot{x} \dot{\theta} \cos\theta)$$

Por otra parte el disco

$$K_D = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{x}^2}_{\text{Componente Translacional}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_{cm} \omega^2}_{\text{Componente rotacional}}$$

Componente Translacional

Componente rotacional

donde bien rueda sin resbalar

$$\Rightarrow a\omega = \dot{x}$$

entonces en K_D se tiene

$$K_D = \frac{3M}{4} \dot{x}^2$$

Así la energía cinética del sistema es

$$K = \frac{3M}{4} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + b^2 \dot{\theta}^2 - 2b\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta)$$

por otro lado fijando $U_g = 0$ en $\bigcirc$

$$\Rightarrow U_g \text{ de } m \text{ es } U_g = -mgb\cos\theta$$

Tenemos el Lagrangiano $L = K - U$

$$L = \frac{3M}{4} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + b^2 \dot{\theta}^2 - 2b\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + mgb\cos\theta$$

b) Las coordenadas generalizadas $\{x, \theta\}$

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange

Coord. x

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{3M}{2} \dot{x} + m\dot{x} - mb\dot{\theta}\cos\theta \right) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{3M}{2} + m \right) \ddot{x} - mb \ddot{\theta} \cos \theta + mb \dot{\theta}^2 \sin \theta = 0$$

(1)

Coord. θ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (mb^2 \dot{\theta} - mb \dot{x} \cos \theta) + mgb \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow mb^2 \ddot{\theta} - mb \ddot{x} \cos \theta + mb \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta + mgb \sin \theta = 0 \quad (2)$$

c) Considerando $\theta \ll 1$

Tenemos en (1)

$$\left(\frac{3M}{2} + m \right) \ddot{x} - mb \ddot{\theta} + \cancel{mb \dot{\theta}^2 \sin \theta} \approx 0$$

orden
cúbico

$$\Rightarrow \left(\frac{3M}{2} + m \right) \ddot{x} = mb \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{mb \ddot{\theta}}{\left(\frac{3M}{2} + m \right)} \quad (3)$$



pequeñas oscilaciones en (2) se tiene

$$mb^2\ddot{\theta} - mb\ddot{x} + \cancel{mb\dot{x}\dot{\theta}} + mgb\theta = 0$$

(cuadrático)

Usando (3)

$$\ddot{\theta} - \cancel{mb^2} - \cancel{mb} \cdot \cancel{mb}\ddot{\theta} + \cancel{mgb}\theta = 0$$
$$\ddot{\theta} \cdot \left(\frac{3M/2 + m}{2} \right) + g\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} b \left[1 + \frac{m}{3M/2 + m} \right] + g\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} \cdot \left(\frac{3M/2 \cdot b}{3M/2 + m} \right) + g\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g(3M/2 + m)}{3M/2 \cdot b} \theta = 0$$

M.A.S.

$$\omega^2 =$$

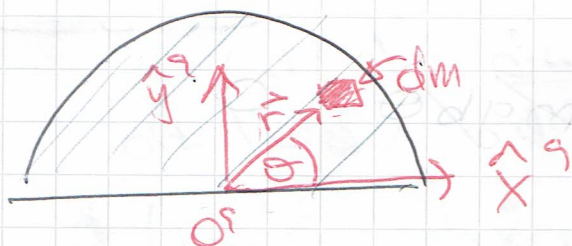
periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



Problema 2

- a) Tenemos entonces la siguiente figura del enunciado



=> Usamos coord. polares
=i el elemento dm se ubica con el vector posición:

$$\vec{r} = r \cos \theta \hat{x} + r \sin \theta \hat{y}$$

donde $r \in [0, R]$
 $\theta \in [0, \pi]$.

Entonces el centro de masa $\vec{r}_{cm}$ respecto a O es

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int dm \vec{r}$$

con ~~dm = \sigma dA~~ $dm = \sigma dA$

donde el elemento de Área dA toma la forma en coord. polares planas

$$dA = r dr d\theta$$

así tenemos $dm = \sigma r dr d\theta$

Tenemos entonces el centro de masa.

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sigma}{M} \left[\left(\int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\theta \cos\theta \right) \hat{x} + \left(\int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \right) \hat{y} \right]$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{cm} = \frac{\sigma}{M} \cdot \frac{2R^3}{3} \hat{y}$$

ahora bien, el cuerpo es uniforme $\Rightarrow \sigma = \frac{M}{A}$

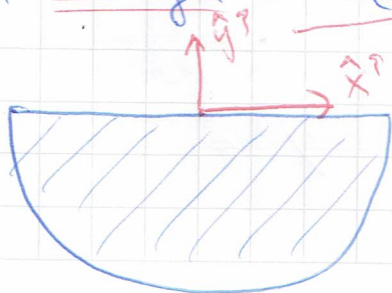
con A : área total $\Rightarrow A = \frac{\pi R^2}{2}$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{2M}{\pi R^2}$$

reemplazando se tiene

$$\vec{r}_{cm} = \frac{4R}{3\pi} \hat{y}$$

Por último para ser consistente con la figura del enunciado:



$\Rightarrow \hat{y} \rightarrow -\hat{y}$ Enunciado

$$\vec{r}_{cm} = -\frac{4R}{3\pi} \hat{y}$$

(b) Sabemos que la componente "zz" del tensor de inercia es

$$I^{zz} = \int dm (x^2 + y^2)$$

Luego respecto z o tenemos,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

y como ya mostramos $dm = \sigma r dr d\theta$

con $r \in [0, R]$
 $\theta \in [0, \pi]$

$$\text{Así tenemos } I_{O'}^{zz} = \sigma \int_0^R dr r^3 \int_0^\pi d\theta$$

integrando y usando $\sigma = \frac{2M}{\pi R^2}$ tenemos

$$\boxed{I_{O'}^{zz} = \frac{MR^2}{2}}$$

c) Por teorema de Steiner sabemos que

$$I_{O'}^{zz} = I_{CM}^{zz} + M \cdot (\overline{O'CM})^2$$

distancia entre O'
y el centro de masa

Parte (a) $\Rightarrow \overline{O'CM} = \frac{4R}{3\pi}$

Así tenemos el momento de inercia del centro de masa

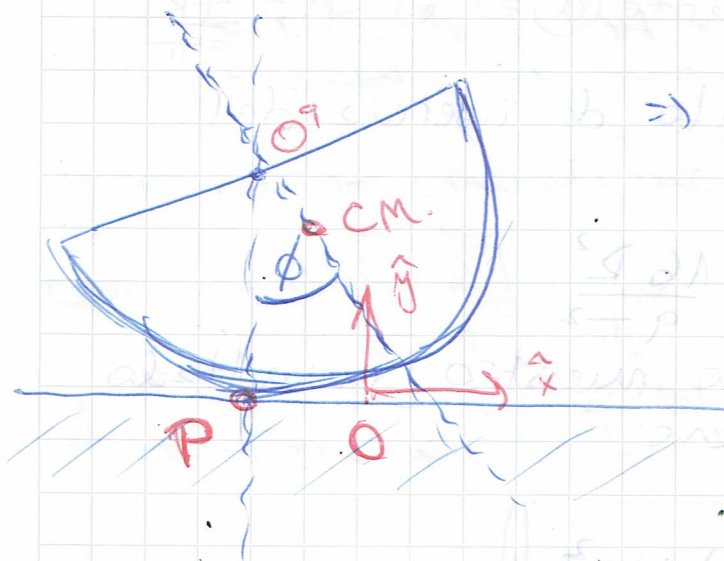
$$I_{CM}^{zz} = I_{O'}^{zz} - M \cdot \frac{16R^2}{9\pi^2}$$

tal que reemplazando nuestro resultado $\frac{I_{O'}^{zz}}{I_{O'}^{zz}} = \frac{MR^2}{2}$ se tiene

$$I_{CM}^{zz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right) MR^2$$

d) Así debemos tener cuidado y escoger un sistema de referencia inercial conveniente

El profe en la figura del enunciado nos da un Hint. Tenemos la siguiente figura.



=> Si fijamos el sistema de referencia inercial en el punto de contacto (suelo) cuando $\phi = 0$ podemos

fácilmente hallar $\vec{r}_{CM}$ respecto a dicho sistema.

Rueda sin resbalar

=> al barrer un ángulo $-\phi$ el "punto" O^P está a $(-R\phi \hat{x})$ del sistema de referencia inercial O

esto básicamente la definición de rodar sin resbalar.

al desplazarnos $(-R\phi \hat{x})$ llegamos al punto P

$\Rightarrow$ si subimos $(R\hat{y})$ llegamos a O'

Luego si usamos coordenadas polares en O' $\Rightarrow$ nos desplazamos $(\frac{4R}{3\pi} \hat{\rho})$

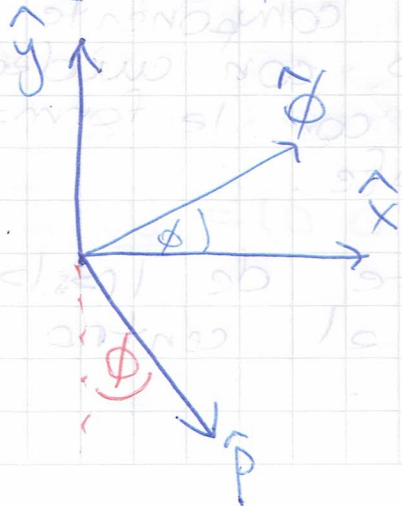
$\Rightarrow$ Llegamos al centro de masa $\vec{r}_{cm}$!!

Así tenemos entonces que $\vec{r}_{cm}$ respecto al sistema inercial O es

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = -R\phi \hat{x} + R\hat{y} + \frac{4R}{3\pi} \hat{\rho}} \quad (1)$$

Ahora $\hat{\rho}$ es del sistema no inercial

$\Rightarrow$ necesitamos relacionarlo con $\hat{x}, \hat{y}$.
 $\Rightarrow$ Veamos, ~~de~~ ~~te~~



$$\Rightarrow \boxed{\hat{\rho} = \sin\phi \hat{x} - \cos\phi \hat{y}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\phi} = \cos\phi \hat{x} + \sin\phi \hat{y}}$$

Usaremos esto $\Rightarrow$
continuación

Dado (1) notamos que la velocidad del centro de masa es

$$\vec{v}_{cm} = -R\dot{\phi}\hat{x} + \frac{4R}{3\pi}\dot{\phi}\hat{\phi} \quad (2)$$

Con esto tenemos la componente traslacional de la energía cinética.

$$K_{Trasl.} = \frac{1}{2} M \vec{v}_{cm}^2$$

Usando (2)

$$\Rightarrow K_{Trasl.} = \frac{M}{2} \left(R^2\dot{\phi}^2 + \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2\dot{\phi}^2 - \frac{8R^2}{3\pi}\dot{\phi}^2 \hat{x} \cdot \hat{\phi} \right)$$

$$\Rightarrow K_{Trasl.} = \frac{M}{2} \left(R^2\dot{\phi}^2 + \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2\dot{\phi}^2 - \frac{8R^2}{3\pi}\dot{\phi}^2 \cos\phi \right)$$

Ahora que pasa con la componente traslacional. Hagámoslo con cuidado para estar de acuerdo con la forma que la presentó el profe.

$\Rightarrow$ el sistema a parte de trasladarse rota en torno al centro de masa. en este caso.

Sabemos que la componente rotacional tiene la forma:

$$K_{ROT} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbf{I}_{cm} \vec{\omega}$$

Traspuesto

Tensor de Inercia

En este problema notamos que

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{z} \quad \left(\hat{z} \text{ o } -\hat{z} \text{ depende si } \dot{\phi} \text{ es positivo o negativo, o es igual} \right)$$



o escrito como matriz:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\omega}^T = (0 \ 0 \ \dot{\phi})$$

Veamos entonces el producto $\vec{\omega}^T \mathbf{I}_{cm} \vec{\omega}$:

$$\vec{\omega}^T \mathbf{I}_{cm} \vec{\omega} = (0 \ 0 \ \dot{\phi}) \begin{pmatrix} I_{cm}^{xx} & I_{cm}^{xy} & I_{cm}^{xz} \\ I_{cm}^{xy} & I_{cm}^{yy} & I_{cm}^{yz} \\ I_{cm}^{xz} & I_{cm}^{yz} & I_{cm}^{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{cm}^{zz} \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}^T I_{cm} \vec{\omega} = (0 \ 0 \ \dot{\phi}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{cm}^{zz} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\omega}^T I_{cm} \vec{\omega} = I_{cm}^{zz} \dot{\phi}^2}$$

por eso en las auxiliares llego y les tiro

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

porque sé que I_{cm} es diagonal y considero solo la componente zz en I_{cm}

Aclarado esto tenemos en este caso

$$\boxed{K_{rot} = \frac{1}{2} I_{cm}^{zz} \dot{\phi}^2}$$

Con I_{cm}^{zz} conocido

$$\Rightarrow \boxed{K_{rot} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right) MR^2 \dot{\phi}^2}$$

Así la energía cinética total es

$$K = K_{\text{Trans.}} + K_{\text{ROT.}}$$

reemplazando los resultados tenemos
simplificando

$$K = \frac{MR^2\dot{\phi}^2}{2} \left[\frac{3}{2} - \frac{8\cos\phi}{3\pi} \right]$$

Por último fijando $U_g = 0$ al nivel del suelo es fácil notar que el centro de masa está a una altura

$$y = R - \frac{4R}{3\pi} \cos\phi \quad \left(\begin{array}{l} \text{lo vemos desde } \vec{r}_{cm} \\ \text{usando } \hat{p} = \sin\phi \hat{x} - \cos\phi \hat{y} \end{array} \right)$$

$$\text{Así } U_g = MgR \left(1 - \frac{4}{3\pi} \cos\phi \right)$$

Tal que la energía Total es

$$E = \frac{MR^2\dot{\phi}^2}{2} \left[\frac{3}{2} - \frac{8\cos\phi}{3\pi} \right] + MgR \left(1 - \frac{4}{3\pi} \cos\phi \right)$$