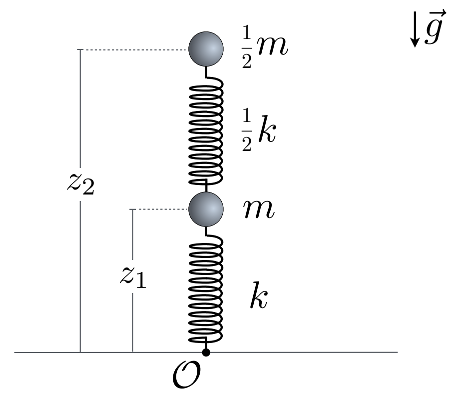
FI-2001 Mecánica - Sección-4
Prof. Gonzalo A. Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi y Danilo Tapia
FCFM, Universidad de Chile

Control 3
Miércoles 18 de junio, 2025
Tiempo: 3horas

P1: Un resorte vertical de constante elástica k y largo natural D, tiene uno de sus extremos anclado al suelo (origen del sistema) y el otro a una masa puntual m. Esta, a su vez, sostiene a un segundo resorte, también vertical, de constante elástica $k/2$ y largo natural D. El extremo superior de este resorte sujeta una masa puntual $m/2$. Sobre el sistema actúa la gravedad.



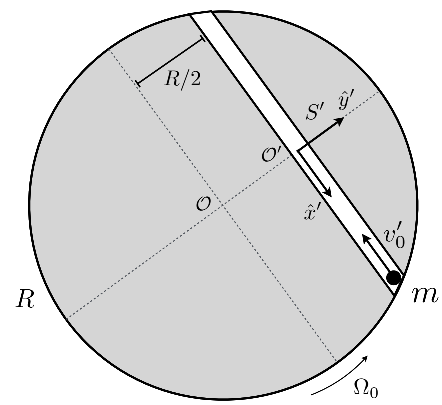
(a) 2pts. Determine el Lagrangiano del sistema en términos de las alturas de ambas partículas desde el nivel del suelo z_1 y z_2.

(b) 1pt. A partir de las condiciones $\frac{\partial L}{\partial z_1} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial z_2} = 0$, y $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_2} = 0$, determine la configuración de equilibrio del sistema (z_1^0, z_2^0).

(c) 2pt. A partir de (b), defina nuevas variables $\delta z_1 \equiv z_1 - z_1^0$ y $\delta z_2 \equiv z_2 - z_2^0$, y deduzca las ecuaciones de movimiento que las gobiernan.

(d) 1pt. Deduzca las frecuencias normales de oscilación e ilustre cómo oscila cada modo normal.

P2: Considere una plataforma circular de radio R que gira con velocidad constante Ω_0. A una distancia $R/2$ del eje de giro hay un canal por donde circula, sin roce, una partícula de masa m. En un cierto momento se impulsa la partícula desde el extremo del canal con una rapidez v_0' respecto del mismo. En este problema no hay gravedad.

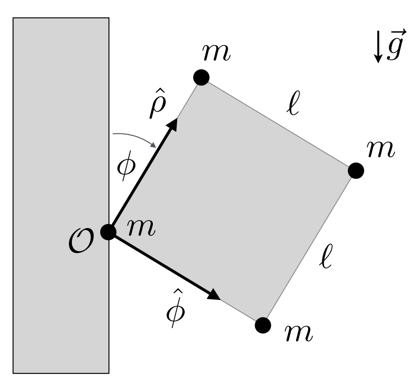


(a) 2.0pts. Determine la ecuación de movimiento para la posición x' de la partícula a lo largo del canal. *Ayuda*: Note que la posición de $\mathcal{O}'$ con respecto a $\mathcal{O}$ es $\vec{R} = (R/2)\hat{y}'$.

(b) 2.0pts. Calcule la magnitud mínima de v_0' para que la partícula llegue al punto central del canal ($x' = 0$).

(c) 2.0pts. Si la partícula se impulsa con el valor v_0' encontrada en la parte (b) desde el extremo del canal, determine la posición x' donde la fuerza que la pared del canal ejerce sobre la partícula es nula.

P3: Considere un sólido rígido compuesto por cuatro masas idénticas m ubicadas en las esquinas de una lámina cuadrada de largo ℓ sin masa. Una de las esquinas del cuadrado permanece unida a una pared vertical mediante una rótula, permitiendo que el cuadrado gire libremente, formando un ángulo ϕ entre uno de sus lados y la pared. En $t = 0$, se libera al sólido desde el reposo, con $\phi = 0$. Considere la presencia de gravedad.



(a) 1.5pts. Calcule el momento angular del sólido c/r a $\mathcal{O}$.

(b) 1.5pts. Calcule el torque total que actúa sobre el sólido c/r a $\mathcal{O}$.

(c) 1.5pts. A partir de los resultados de las partes (a) y (b), derive la ecuación de movimiento que debe respetar el ángulo ϕ. Intégrela una vez para obtener una relación entre $\dot{\phi}$ y ϕ.

(d) 1.5pts. Calcule la fuerza $\vec{F}_{\text{pared}}$ que ejerce la pared sobre el sólido como función del ángulo ϕ. Exprese su resultado en la base $\{\hat{\rho}, \hat{\phi}\}$ de la figura. *Ayuda*: Recuerde la ecuación $M\vec{a}_{\text{CM}} = F_{\text{tot}}^{\text{ext}}$.

Fórmulas útiles

Relaciones cinemáticas para coordenadas cilíndricas:

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}, \qquad \vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}, \qquad \vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}. \tag{1}$$

El Lagrangiano para un sistema con energía cinética K y potencial U viene dado por:

$$L = K - U. \tag{2}$$

Las ecuación de Euler-Lagrange para la coordinada generalizada q_i viene dada por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{3}$$

La derivada temporal dee un vector unitario $\hat{u}$ que gira con velocidad angular $\vec{\Omega}$ es

$$\frac{d}{dt}\hat{u} = \vec{\Omega} \times \hat{u}. \tag{4}$$

Recuerde las siguientes relaciones conectando cantidades cinemáticas de un sistema inercial S con un sistema no inercial S':

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,', \qquad \vec{v} = \dot{\vec{R}} + \vec{v}\,' + \vec{\Omega} \times \vec{r}\,'. \tag{5}$$

La segunda ley de Newton válida en un sistema no inercial S' es:

$$m\,\vec{a}' = \vec{F}_{\text{tot}} - m\,\ddot{\vec{R}} - m\,\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}\,') - 2m\,\vec{\Omega} \times \vec{v}\,' - m\,\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}\,'. \tag{6}$$

El momento angular $\vec{L}_P$ y el torque $\vec{\tau}_P$ de un sistema de varias partículas con respecto a un punto fijo P, vienen dados por

$$\vec{L}_P = \sum_i m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times \vec{v}_i, \qquad \vec{\tau}_P = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times F_i^{\text{ext}}. \tag{7}$$

El momento angular $\vec{L}_{\mathcal{O}}$ para un sólido rígido, con respecto a un origen fijo $\mathcal{O}$ viene dado por

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + M\vec{R} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}\,'_{\text{CM}}) + M\vec{r}\,'_{\text{CM}} \times \dot{\vec{R}} + I_{\mathcal{O}'}\vec{\Omega}\,, \tag{8}$$

donde $\vec{R}$ es la posición de $\mathcal{O}'$ con respecto a $\mathcal{O}$, y $\vec{r}\,'_{\text{CM}}$ es la posición del centro de masas con respecto a $\mathcal{O}'$. Adicionalmente, recuerde que $I_{\mathcal{O}'}$ es la matriz de inercia calculada con respecto al sistema S' solidario al sólido:

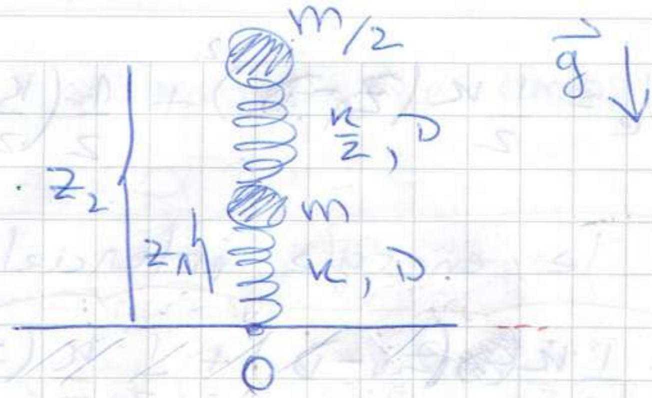
$$I_{\mathcal{O}'} = \sum_i m_i \left(||\vec{r}_i||^2\mathbb{I} - \vec{r}\,'_i\vec{r}\,'^t_i\right) = \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_i'^2 + z_i'^2 & -x_i'y_i' & -x_i'z_i' \\ -x_i'y_i' & x_i'^2 + z_i'^2 & -y_i'z_i' \\ -x_i'z_i' & -y_i'z_i' & x_i'^2 + y_i'^2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Sol P1: **(a)** $L=\frac{m}{2}\dot{z}_1^2+\frac{m}{4}\dot{z}_2^2-\frac{k}{2}(z_1-D)^2-\frac{k}{4}(z_2-z_1-D)^2-mgz_1-\frac{m}{2}gz_2$. **(b)** $\frac{\partial L}{\partial z_1}=-k(z_1-D)+\frac{k}{2}(z_2-z_1-D)-mg$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1}=m\dot{z}_1$, $\frac{\partial L}{\partial z_2}=-\frac{k}{2}(z_2-z_1-D)-\frac{m}{2}g$, y $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_2}=\frac{m}{2}\dot{z}_2$. Luego: $z_1^0=D-\frac{3mg}{2k}$ y $z_2^0=2D-\frac{5mg}{2k}$. **(c)** Las ecuaciones de movimiento son $\delta\ddot{z}_1+\frac{k}{2m}\left[3\delta z_1-\delta z_2\right]$ y $\delta\ddot{z}_2+\frac{k}{m}\left[-\delta z_1+\delta z_2\right]$. **(d)** La matriz de frecuencia es $\Omega^2=\frac{k}{m}\begin{pmatrix}3/2 & -1/2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, de donde $\omega_1=\sqrt{\frac{k}{2m}}$ y $\omega_2=\sqrt{\frac{2k}{m}}$. El modo ω_1 es tal que si δz_1 crece, δz_2 crece el doble; el modo ω_2 es tal que si δz_1 crece, δz_2 decrece en la misma proporción.

Sol P2: **(a)** Se tiene $\vec{R}=(R/2)\hat{y}'$. Notar que $\frac{d}{dt}\hat{y}'=-\Omega_0\hat{x}'$, por lo tanto $\dot{\vec{R}}=-\Omega_0(R/2)\hat{x}'$ y $\ddot{\vec{R}}=-\Omega_0^2(R/2)\hat{y}'$. Luego, la ec. (6) del formulario da $m\hat{x}'\ddot{x}'=\hat{y}'N+m\Omega_0^2(R/2)\hat{y}'+mx'\Omega_0^2\hat{x}'-2m\dot{x}'\Omega_0\hat{y}'$. La componente x' es: $\ddot{x}'-\Omega_0^2x'=0$. **(b)** Integrando e imponiendo condiciones iniciales: $\dot{x}'^2-\Omega_0^2x'^2={v_0'}^2-3\Omega_0^2R^2/4$. Sigue que ${v_0'}^2=3\Omega_0^2R^2/4$. **(c)** La componente y' de la ecuación es: $0'=N+m\Omega_0^2(R/2)-2m\dot{x}'\Omega_0$. Usando la ecuación de la parte anterior ($\dot{x}'^2-\Omega_0^2x'^2={v_0'}^2-3\Omega_0^2R^2/4$) y la condición $N=0$, finalmente se obtiene: $x'=R/4$ (ocurre mientras la partícula va de regreso hacia el punto inicial).

Sol P3: **(a)** Tenemos $\vec{r}_1=\ell\hat{\rho}$, $\vec{r}_2=\ell\hat{\rho}+\ell\hat{\phi}$, $\vec{r}_3=\ell\hat{\phi}$ y $\vec{r}_4=0$. Luego: $\vec{L}_{\mathcal{O}}=m(\ell\hat{\rho})\times(\ell\dot{\phi}\hat{\phi})+m(\ell\hat{\rho}+\ell\hat{\phi})\times(\ell\dot{\phi}\hat{\phi}-\ell\dot{\phi}\hat{\rho})+m(\ell\hat{\phi})\times(-\ell\dot{\phi}\hat{\rho})$. Sumando: $\vec{L}_{\mathcal{O}}=4m\ell^2\dot{\phi}\hat{z}$. **(b)** Se tiene: $\vec{\tau}_{\mathcal{O}}=mg(\ell\hat{\rho})\times(-\cos\phi\hat{\rho}+\sin\phi\hat{\phi})+mg(\ell\hat{\rho}+\ell\hat{\phi})\times(-\cos\phi\hat{\rho}+\sin\phi\hat{\phi})+mg(\ell\hat{\phi})\times(-\cos\phi\hat{\rho}+\sin\phi\hat{\phi})$. Sumando $\vec{\tau}_{\mathcal{O}}=2mg\ell\hat{z}(\sin\phi+\cos\phi)$. **(c)** Se tiene: $\ddot{\phi}-\frac{g}{2\ell}(\sin\phi+\cos\phi)=0$. Integrando $\dot{\phi}^2=\frac{g}{\ell}(1-\cos\phi+\sin\phi)$. **(d)** $\vec{r}_{\rm CM}=\frac{1}{2}\ell(\hat{\rho}+\hat{\phi})$. Luego $\vec{a}_{\rm CM}=\frac{1}{2}\ddot{\phi}\ell(\hat{\phi}-\hat{\rho})-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\ell(\hat{\rho}+\hat{\phi})$. La ecuación $M\vec{a}_{\rm CM}=F_{\rm tot}^{\rm ext}$ entonces adopta la forma: $4m\frac{1}{2}\ell[\ddot{\phi}(\hat{\phi}-\hat{\rho})-\dot{\phi}^2(\hat{\rho}+\hat{\phi})]=4mg(-\cos\phi\hat{\rho}+\sin\phi\hat{\phi})+\vec{F}_{\rm pared}$. Despejando y reemplazando los resultados de la parte (c): $\vec{F}_{\rm pared}=-mg(2+5\sin\phi-3\cos\phi)\hat{\phi}-mg(2+3\sin\phi-5\cos\phi)\hat{\rho}$.

Problema 1



(2 pt).

a) El lagrangiano es $\boxed{L = K - U}$

Veamos K.

Respecto a O las posiciones son

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = z_1 \hat{z} \\ \vec{r}_2 = z_2 \hat{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = \dot{z}_1 \hat{z} \\ \vec{v}_2 = \dot{z}_2 \hat{z} \end{cases}$$

Así la energía cinética del sistema es

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m \dot{z}_1^2 + \frac{1}{4} m \dot{z}_2^2}$$

Veamos U $\Rightarrow$ $U = \underbrace{U_e}_{\text{elástica}} + \underbrace{U_g}_{\text{gravedad}}$

$$\boxed{U_g = m g z_1 + \frac{m}{2} g z_2}$$

$$U_e = \frac{1}{2}k(\cancel{z_1 - D})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{2}\right)(z_2 - z_1 - D)^2$$

Así la energía potencial es

$$U = \frac{1}{2}k(z_1 - D)^2 + \frac{1}{2}\frac{k}{2}(z_2 - z_1 - D)^2 + $$
$$+ mgz_1 + \frac{m}{2}gz_2$$

Así tenemos el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}_1^2 + \frac{1}{4}m\dot{z}_2^2 - \frac{k}{2}(z_1 - D)^2 - \frac{k}{4}(z_2 - z_1 - D)^2 +$$
$$- mgz_1 - \frac{m}{2}gz_2$$

(1 pt)

b) Tenemos equilibrio cuando

$$\left(\frac{\partial L}{\partial z_1} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial L}{\partial z_2} = 0\right)$$

- $$\frac{\partial L}{\partial z_1} = -k(z_1 - D) + \frac{k}{2}(z_2 - z_1 - D) \cancel{-} mg = 0$$

- $$\frac{\partial L}{\partial z_2} = -\frac{k}{2}(z_2 - z_1 - D) - \frac{mg}{2} = 0$$

Sumando ambas ecuaciones tenemos

$$-k(z_1-D) - mg - \frac{mg}{2} = 0$$

despejando tenemos $z_1^{(eq)}$

$$\boxed{z_1^{(eq)} = D - \frac{3mg}{2k}} \quad (1)$$

Usando esto en la primera ecuación:

$$\Rightarrow -k\cdot\left(-\frac{3mg}{2k}\right) + \frac{k}{2}\left(z_2^{(eq)} + \frac{3mg}{2k} - 2D\right) - mg = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3mg}{2} + \frac{k}{2} z_2^{(eq)} + \frac{3mg}{4} - kD - mg = 0$$

$\Rightarrow$ despejando $\boxed{z_2^{(eq)} = 2D - \frac{5mg}{2k}}$ (2)

$\Rightarrow$ Con (1) y (2) tenemos el punto de equilibrio.

(2 pt)

c) Desde L tenemos las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_1} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial z_2} = 0$$

Toman la forma:

$$m\ddot{z}_1 + k(z_1 - D) - \frac{k}{2}(z_2 - z_1 - D) + mg = 0$$
$$\frac{m}{2}\ddot{z}_2 + \frac{k}{2}(z_2 - z_1 - D) + \frac{mg}{2} = 0$$

Luego definimos el cambio de variable (perturbación del equilibrio)

$$z_1 = z_1^{eq} + \delta z_1$$
$$z_2 = z_2^{eq} + \delta z_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{z}_1 = \delta\ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 = \delta\ddot{z}_2 \end{cases}$$

Reemplazando se tiene en la primera ecuación:

$$m\delta\ddot{z}_1 + mg + k\delta z_1 - k\frac{3mg}{2k} - \frac{k}{2}\left[\delta z_2 - \delta z_1 + \cancel{2D} + \right.$$

$$\left. - \frac{5mg}{2k} \cancel{-D} + \frac{3mg}{2k} \cancel{-D}\right] = 0$$

$$\Rightarrow m\delta\ddot{z}_1 \cancel{+mg} + k\delta z_1 - \frac{3mg}{\cancel{2}} - \frac{k}{2}(\delta z_2 - \delta z_1) +$$

$$+ \cancel{\frac{mg}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta\ddot{z}_1 + \frac{3k}{2m}\delta z_1 - \frac{k}{2m}\delta z_2 = 0} \quad (3)$$

Análogamente se tiene

$$\boxed{\delta\ddot{z}_2 - \frac{k}{m}\delta z_1 + \frac{k}{m}\delta z_2 = 0} \quad (4)$$

(1 pt)

d) Podemos reescribir (3) y (4) como

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} + \Omega^2\vec{r} = 0} \quad (5) \quad \text{con} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \delta z_1 \\ \delta z_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{y} \quad \boxed{\Omega^2 = \begin{pmatrix} 3k/2m & -k/2m \\ -k/m & k/m \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$ proponemos un ansatz oscilatorio

$$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega t} \quad \text{con} \quad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

tal que insertándolo en (5)

$$\left[-\omega^2 \mathbb{1} + \Omega^2\right] \vec{r}_0 = \vec{0}.$$

con $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces podemos reescribir como

$$\left[-\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right] \vec{r}_0 = \vec{0}$$

buscamos solución no trivial, esto es $\vec{r}_0 \neq \vec{0}$

$\Rightarrow$ que la matriz $[\cdot\cdot\cdot]$ sea no invertible

$$\Rightarrow \det\left[-\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

desde acá se tiene la ecuación:

$$\omega^4 - \frac{5k}{2m}\omega^2 + \frac{k^2}{m^2} = 0$$

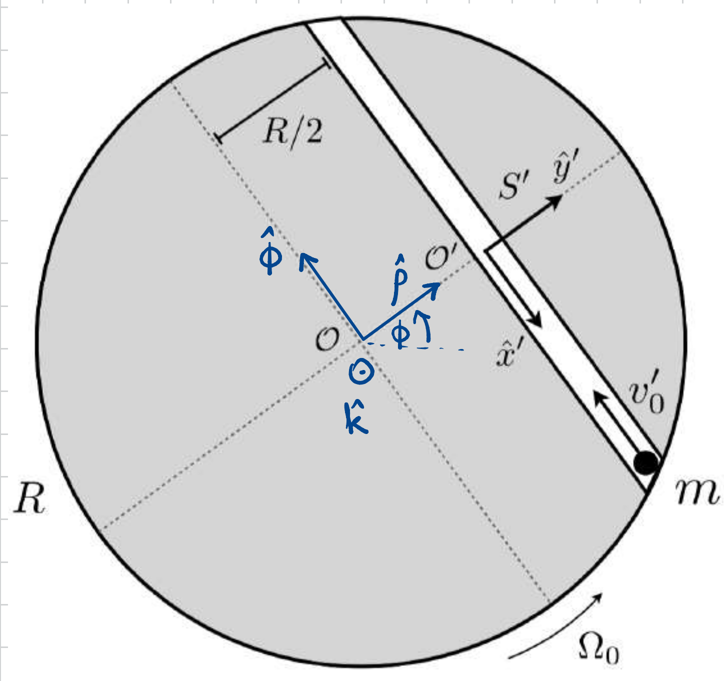
desde donde tenemos las soluciones

$$\boxed{w^2 = \frac{k}{4m}(5 \pm 3)}.$$

Así tenemos las dos frecuencias de oscilación:

$$\boxed{w_+^2 = 2\frac{k}{m}} \quad y \quad \boxed{w_-^2 = \frac{k}{2m}}$$

P2



a) Ocuparemos el sist. $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{k}'\}$ ya puesto en la Figura. La posición de la partícula sería

$$\vec{r}' = x'\hat{x}' \Rightarrow \dot{\vec{r}}' = \dot{x}'\hat{x}' \Rightarrow \ddot{\vec{r}}' = \ddot{x}'\hat{x}'$$

Para definir $\ddot{\vec{R}}$ ocupamos el sist. inercial $\{\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k}\}$, entonces

$$\vec{R} = (R/2)\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{R}} = (R/2)\dot{\phi}\hat{\phi} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = -(R/2)\dot{\phi}^2\hat{\rho} + (R/2)\ddot{\phi}\hat{\phi}$$

donde $\dot{\phi} = \Omega_0 \Rightarrow \ddot{\phi} = 0$, así que

$$\ddot{\vec{R}} = -(R/2)\Omega_0^2\hat{\rho} = -(R/2)\Omega_0^2\hat{y}'$$

* También se podía ocupar $\vec{R} = (R/2)\hat{y}'$, donde habría que utilizar $\dot{\hat{u}} = \vec{\Omega}\times\hat{u}$ y obtener $\ddot{\vec{R}} = -(R/2)\Omega_0^2\hat{y}'$

La velocidad angular es simplemente $\vec{\Omega} = \Omega_0\hat{k} = \Omega_0\hat{k}'$, y solo hay fuerza normal actuando sobre la partícula

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{N} = N\hat{y}'$$

Calculamos cada término de la fórmula de SRNI

- $m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{x}'\hat{x}'$
- $-m\ddot{\vec{R}} = m(R/2)\Omega_0^2\hat{y}'$
- $-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = -m\Omega_0\hat{k}'\times(\Omega_0\hat{k}'\times x'\hat{x}') = m\Omega_0^2 x'\hat{x}'$
- $-2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' = -2m\Omega_0\hat{k}'\times\dot{x}'\hat{x}' = -2m\Omega_0\dot{x}'\hat{y}'$
- $-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' = \vec{0}$

y reemplazando

$$\hat{x}')\quad \boxed{m\ddot{x}' = m\Omega_0^2 x'} \quad (1)$$

$$\hat{y}')\quad 0 = N\hat{y}' + m(R/2)\Omega_0^2 - 2m\Omega_0\dot{x}' \quad (2)$$

b) Que v_0' sea la velocidad mínima para llegar a $x'=0$, implica que queremos que $\dot{x}'(x'=0) \overset{!}{=} 0$. Así que integramos (1) con truco de mecánica

$$\dot{x}'\frac{d\dot{x}'}{dx'} = \Omega_0^2 x' \quad // \int_{x_0'}^{x'} dx'$$

$$\Rightarrow \int_{v_0'}^{\dot{x}'} \dot{x}' d\dot{x}' = \Omega_0^2 \int_{x_0'}^{x'} x' dx'$$

$$\Rightarrow \dot{x}'^2 - v_0'^2 = \Omega_0^2 (x'^2 - x_0'^2) \quad (3)$$

donde, por pitágoras, sabemos que $R^2 = R^2/4 + x_0'^2 \Rightarrow x_0'^2 = 3R^2/4$. Entonces, imponiendo $\dot{x}'(x'=0) \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow 0 - v_0'^2 = \Omega_0^2 (0 - 3R^2/4)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_0' = \frac{\Omega_0 R \sqrt{3}}{2}}$$

c) En (2) imponemos $N(x'^*) = 0$ y reemplazamos $\dot{x}'$ con (3)

$$(2) \Rightarrow 0 = m(R/2)\Omega_0^2 - 2m\Omega_0^2 \sqrt{\cancel{\frac{3R^2}{4}} + x'^{*2} - \cancel{\frac{3R^2}{4}}} \Rightarrow \boxed{x'^* = \frac{R}{4}}$$

Control 3

P3

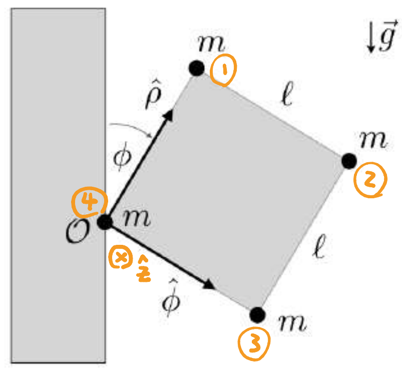
P3: Considere un sólido rígido compuesto por cuatro masas idénticas m ubicadas en las esquinas de una lámina cuadrada de largo ℓ sin masa. Una de las esquinas del cuadrado permanece unida a una pared vertical mediante una rótula, permitiendo que el cuadrado gire libremente, formando un ángulo ϕ entre uno de sus lados y la pared. En $t = 0$, se libera al sólido desde el reposo, con $\phi = 0$. Considere la presencia de gravedad.

(a) 1.5pts. Calcule el momento angular del sólido c/r a $\mathcal{O}$.

(b) 1.5pts. Calcule el torque total que actúa sobre el sólido c/r a $\mathcal{O}$.

(c) 1.5pts. A partir de los resultados de las partes (a) y (b), derive la ecuación de movimiento que debe respetar el ángulo ϕ. Intégrela una vez para obtener una relación entre $\dot\phi$ y ϕ.

(d) 1.5pts. Calcule la fuerza $\vec F_{\text{pared}}$ que ejerce la pared sobre el sólido como función del ángulo ϕ. Exprese su resultado en la base $\{\hat\rho, \hat\phi\}$ de la figura. *Ayuda*: Recuerde la ecuación $M\vec a_{\text{CM}} = F^{\text{ext}}_{\text{tot}}$.



a) La posición de cada masa es

$\vec r_1 = \ell\hat\rho \quad\Rightarrow\quad \vec v_1 = \ell\dot\phi\hat\phi$ +0,1

$\vec r_2 = \ell\hat\rho + \ell\hat\phi \quad\Rightarrow\quad \vec v_2 = \ell(\dot\phi\hat\phi - \dot\phi\hat\rho)$ +0,2

$\vec r_3 = \ell\hat\phi \quad\Rightarrow\quad \vec v_3 = -\ell\dot\phi\hat\rho$ +0,1

$\vec r_4 = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec v_4 = 0$ +0,2

El momento angular de cada masa es

$\vec L^i_{\mathcal{O}} = m\,\vec r_i \times \vec v_i$

$\Rightarrow \vec L^1_{\mathcal{O}} = m\ell\hat\rho \times \ell\dot\phi\hat\phi = m\ell^2\dot\phi\,\hat z$ +0,2

$\vec L^2_{\mathcal{O}} = m(\ell\hat\rho + \ell\hat\phi)\times \ell(\dot\phi\hat\phi - \dot\phi\hat\rho) = 2m\ell^2\dot\phi\,\hat z$ +0,2

$\vec L^3_{\mathcal{O}} = m\ell\hat\phi \times -\ell\dot\phi\hat\rho = m\ell^2\dot\phi\,\hat z$ +0,2

$\vec L^4_{\mathcal{O}} = m\cdot 0 \times 0 = 0$ +0,2

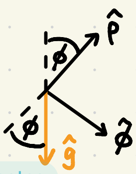
$\Rightarrow \boxed{\vec L_{\mathcal{O}} = \sum_{i=1}^{4} \vec L^i_{\mathcal{O}} = 4m\ell^2\dot\phi\,\hat k}$ +0,1

1,5

b) El torque de cada fuerza es

$\vec\tau^i_{\mathcal{O}} = \vec r_i \times \vec F^{ext}_i$

en este caso, $\vec F^{ext}_i$ son las fuerzas peso de cada masa y la fuerza que ejerce la pared. Luego, el peso de cada masa cumple que



$\Rightarrow \hat g = -\cos\phi\,\hat\rho + \sin\phi\,\hat\phi$ +0,5

Luego

$\vec\tau^1_{\mathcal{O}} = \ell\hat\rho \times mg(-\cos\phi\,\hat\rho + \sin\phi\,\hat\phi)$
$= mg\ell\sin\phi\,\hat z$ +0,2

$\vec\tau^2_{\mathcal{O}} = (\ell\hat\rho + \ell\hat\phi)\times mg(-\cos\phi\,\hat\rho + \sin\phi\,\hat\phi)$
$= mg\ell(\sin\phi + \cos\phi)\,\hat z$ +0,2

$\vec\tau^3_{\mathcal{O}} = \ell\hat\phi \times mg(-\cos\phi\,\hat\rho + \sin\phi\,\hat\phi)$
$= mg\ell\cos\phi\,\hat z$ +0,2

$\vec\tau^4_{\mathcal{O}} = 0 \times (\vec F_{pared} + mg\hat g) = 0$ +0,2

$\Rightarrow \boxed{\vec\tau_{\mathcal{O}} = \sum_{i=1}^{4}\vec\tau^i_{\mathcal{O}} = 2mg\ell(\cos\phi + \sin\phi)\,\hat z}$ +0,2

1,5

c) Usando $\frac{d}{dt}\vec L_{\mathcal{O}} = \vec\tau_{\mathcal{O}}$ +0,3

$\frac{d}{dt}\vec L_{\mathcal{O}} = 4m\ell^2\ddot\phi\,\hat z$

$\Rightarrow 4\cancel{m}\ell^{\cancel{2}}\ddot\phi\cancel{\hat z} = 2\cancel{m}g\cancel{\ell}(\cos\phi + \sin\phi)\cancel{\hat z}$

$\Rightarrow \boxed{\ddot\phi - \frac{1}{2}\frac{g}{\ell}(\cos\phi + \sin\phi) = 0}$ +0,4

Integrando con $\ddot\phi = \dot\phi\frac{d\dot\phi}{d\phi}$

$\dot\phi\frac{d\dot\phi}{d\phi} - \frac{1}{2}\frac{g}{\ell}(\cos\phi + \sin\phi) = 0 \qquad / \int_0^t dt = \int_0^\phi d\phi$

$\frac{1}{2}\dot\phi^2\Big|_0^\phi - \frac{1}{2}\frac{g}{\ell}\left(\sin\phi\Big|_0^\phi - \cos\phi\Big|_0^\phi\right) = 0$

$\frac{1}{2}\dot\phi^2 - \cancel{\frac{1}{2}\dot\phi(0)^2}^{\,0} - \frac{1}{2}\frac{g}{\ell}\left[\sin\phi - 0 - \cos\phi + 1\right] = 0$ parte reposo

$\Rightarrow \boxed{\dot\phi^2 = \frac{g}{\ell}(\sin\phi - \cos\phi + 1)}$ +0,8

1,5

d) Ahora, como $M_{TOT}\vec{a}_{CM} = \vec{F}^{ext}_{TOT}$

La posición de centro de masa

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M_{TOT}}\sum m_i \vec{r}_i = \frac{1}{4\cancel{m}}\sum \cancel{m}\,\vec{r}_i$$

$$= \frac{1}{4}\left(l\hat{\rho} + l\hat{\rho} + l\hat{\phi} + l\hat{\phi}\right)$$

$$= \frac{1}{2}l\left(\hat{\rho} + \hat{\phi}\right) \qquad +0{,}3$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{CM} = \frac{1}{2}l\left(\dot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}\hat{\rho}\right) \qquad +0{,}2$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{CM} = \frac{1}{2}l\left(\ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}^2\hat{\rho} - \ddot{\phi}\hat{\rho} - \dot{\phi}^2\hat{\phi}\right)$$

$$= \frac{1}{2}l\left[-\left(\dot{\phi}^2 + \ddot{\phi}\right)\hat{\rho} + \left(\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2\right)\hat{\phi}\right] \qquad +0{,}2$$

Reemplazando en la fórmula

$$\cancelto{2}{4}m\,\frac{1}{\cancel{2}}l\left[-\left(\dot{\phi}^2+\ddot{\phi}\right)\hat{\rho} + \left(\ddot{\phi}-\dot{\phi}^2\right)\hat{\phi}\right] = 4mg\,\hat{g} + \vec{F}_{pared}$$

con $\hat{g} = -\cos\phi\,\hat{\rho} + \sin\phi\,\hat{\phi}$ y $\vec{F}_{pared} = F_\rho\hat{\rho} + F_\phi\hat{\phi}$

Por componentes

$$\hat{\rho}\,\big|\quad -2ml\left(\dot{\phi}^2 + \ddot{\phi}\right) = -4mg\cos\phi + F_\rho \qquad (1)$$

$$\hat{\phi}\,\big|\quad 2ml\left(\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2\right) = 4mg\sin\phi + F_\phi \qquad (2)$$

+0,3

Reemplazando $\ddot{\phi}$ y $\dot{\phi}^2$ calculados

De (1)

$$F_\rho = 4mg\cos\phi - 2m\cancel{l}\left[\frac{g}{\cancel{l}}\left(\sin\phi - \cos\phi + 1\right) + \frac{g}{2\cancel{l}}\left(\cos\phi + \sin\phi\right)\right]$$

$$= mg\left(4\cos\phi - 2\sin\phi + 2\cos\phi - 2 - \cos\phi - \sin\phi\right)$$

$$= mg\left(5\cos\phi - 3\sin\phi - 2\right) \qquad +0{,}2$$

De (2)

$$F_\phi = -4mg\sin\phi + 2m\cancel{l}\left[\frac{g}{2\cancel{l}}\left(\cos\phi + \sin\phi\right) - \frac{g}{\cancel{l}}\left(\sin\phi - \cos\phi + 1\right)\right]$$

$$= mg\left(-4\sin\phi + \cos\phi + \sin\phi - 2\sin\phi + 2\cos\phi - 2\right)$$

$$= mg\left(3\cos\phi - 5\sin\phi - 2\right) \qquad +0{,}2$$

+0,1

$$\Rightarrow \vec{F}_{pared} = mg\left(5\cos\phi - 3\sin\phi - 2\right)\hat{\rho} + mg\left(3\cos\phi - 5\sin\phi - 2\right)\hat{\phi}$$

$\boxed{1{,}5}$