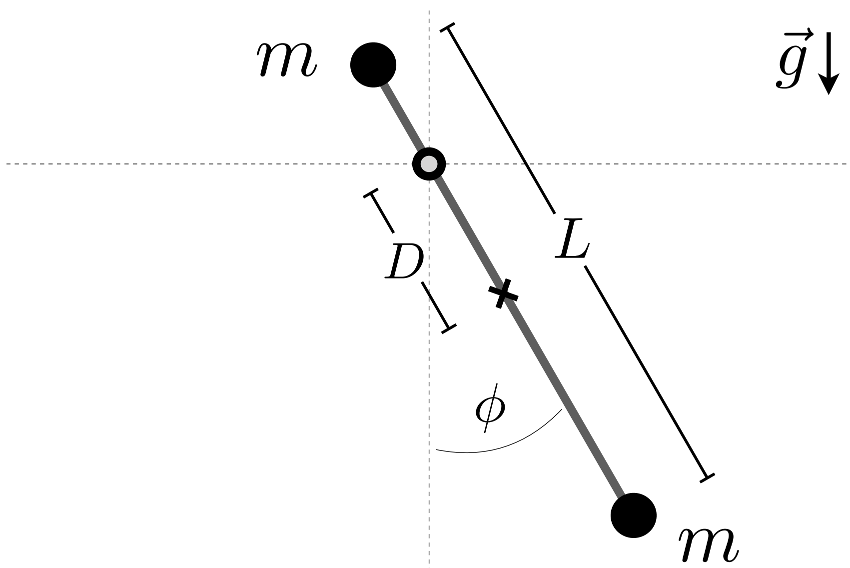
Mecánica FI2001-4
Ejercicio 8: Jueves 12 de junio, 2025

Prof. Gonzalo A. Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi y Danilo Tapia

Una varilla rígida **sin masa** de largo L tiene dos masas idénticas de valor m adosadas en sus extremos. La varilla puede rotar libremente en torno a un eje ubicado a una distancia $D < L/2$ de su centro, formando un péndulo (ver figura). El ángulo entre la varilla y la vertical está dado por ϕ.



(a) 2.5pts: Calcule el momento angular total del sistema con respecto al eje de rotación.

Ayuda 1: Note que las masas están ubicadas en las posiciones: $\vec{r}_1 = (L/2 + D)\hat{\rho}$ y $\vec{r}_2 = -(L/2 - D)\hat{\rho}$.

Ayuda 2: Recuerde que $\hat{\rho} \times \hat{\phi} = \hat{k}$.

(b) 2.0pts: Calcule el torque total del sistema con respecto al eje de rotación.

Ayuda 3: La fuerza gravitacional apunta en la dirección: $\hat{g} = \cos\phi\,\hat{\rho} - \sin\phi\,\hat{\phi}$.

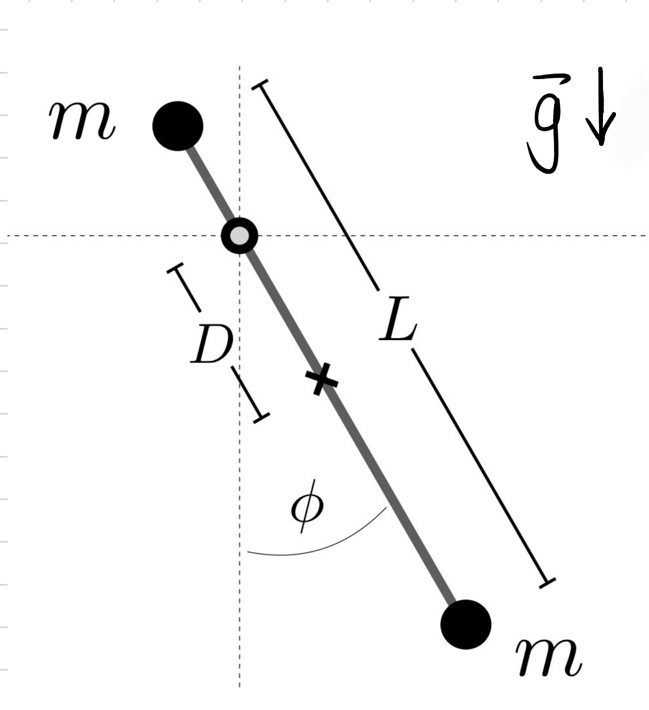
(c) 1.5pts: A partir de sus cálculos anteriores, obtenga la ecuación de movimiento para el ángulo ϕ.

Recuerde: La posición y velocidad en coordenadas polares vienen dadas por:

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho}, \qquad \vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi}. \tag{1}$$

Ejercicio 8

P1



a) Usamos la indicación para las posiciones

$$\vec{r}_1 = (L/2+D)\hat{\rho}\,, \quad \vec{r}_2 = -(L/2-D)\hat{\rho}$$

entonces las velocidades son

$$\vec{v}_1 = (L/2+D)\dot{\phi}\hat{\phi}\,, \quad \vec{v}_2 = -(L/2-D)\dot{\phi}\hat{\phi}$$

entonces el momentum angular total es

$$\vec{L}_{tot} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

$$= m(L/2+D)\hat{\rho}\times(L/2+D)\dot{\phi}\hat{\phi} + m(L/2-D)\hat{\rho}\times(L/2-D)\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$= m[\,L^2/4 + LD + D^2 + L^2/4 - LD + D^2\,]\dot{\phi}\hat{k}$$

$$= m[\,L^2/2 + 2D^2\,]\dot{\phi}\hat{k}$$

b) Solo tenemos torque del peso, $m\vec{g} = mg(\cos\phi\,\hat{\rho} - \sin\phi\,\hat{\phi})$, entonces el torque total es

$$\vec{\tau}_{tot} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$$

$$= (L/2+D)\hat{\rho}\times mg(\cos\phi\,\hat{\rho} - \sin\phi\,\hat{\phi}) - (L/2-D)\hat{\rho}\times mg(\cos\phi\,\hat{\rho} - \sin\phi\,\hat{\phi})$$

$$= -mg(L/2+D)\sin\phi\,\hat{k} + mg(L/2-D)\sin\phi\,\hat{k}$$

$$= -2D\sin\phi\,\hat{k}$$

c) Usamos $\vec{\tau}_{tot} = d\vec{L}_{tot}/dt$ y tenemos

$$m[\,L^2/2 + 2D^2\,]\ddot{\phi} = -2D\sin\phi$$

que tiene la forma de un péndulo simple