Auxiliar 23

Sólido rígido continuo I

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

P1.-

Considere un disco de radio R y masa M (homogéneamente distribuida) colocado en forma vertical. El sistema puede girar con roce despreciable alrededor de un eje $\mathcal{O}$ horizontal que pasa a una distancia $R/2$ del centro del disco. Inicialmente, el disco se encuentra en reposo, sujeto a una cuerda fija al punto P (ver figura.)

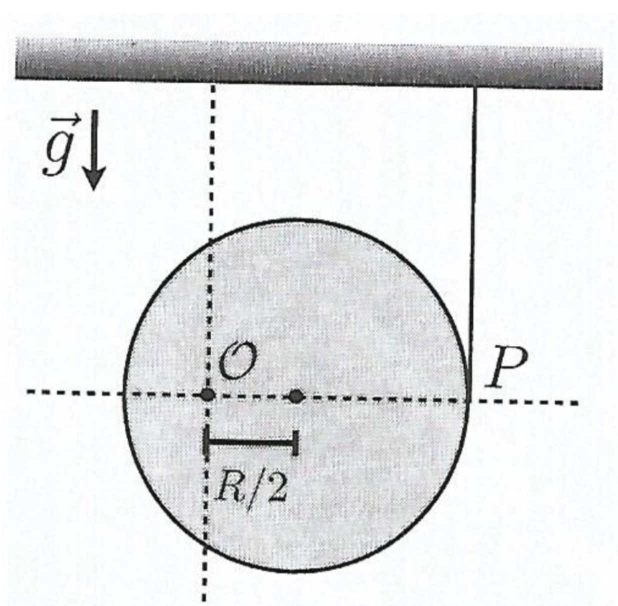
a) Calcule el tensor de inercia del disco con respecto al punto $\mathcal{O}$ por donde pasa el eje horizontal

b) Calcule la tensión de la cuerda

Ahora considere que se corta la cuerda, se pide lo siguiente:

c) Determine la velocidad angular máxima del disco en su movimiento

d) Encuentre la expresión de la fuerza que ejerce el pivote $\mathcal{O}$ sobre el disco para todo ángulo ϕ medido desde la vertical al eje $\mathcal{O} - \text{CM}$



Formulario

Tensor de inercia

Para un sólido rígido con una distribución continua de masa (no necesariamente homogénea), su tensor de inercia tomando como pivote/origen un punto $\mathcal{O}'$, se calcula como

$$I_{\mathcal{O}'} = \int \begin{pmatrix} (y')^2+(z')^2 & -x'y' & -x'z' \\ -y'x' & (x')^2+(z')^2 & -y'z' \\ -z'x' & -z'y' & (x')^2+(y')^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}m' \,,$$

que también se puede escribir como

$$I^{ij}_{\mathcal{O}'} = \int ((r')^2\delta_{ij} - x'_i x'_j)\,\mathrm{d}m' \ \text{, con } i,j \in \{1,2,3\}$$

donde $x'_1 = x'$, $x'_2 = y'$, $x'_3 = z'$, $(r')^2 = (x')^2+(y')^2+(z')^2$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

El diferencial de masa $\mathrm{d}m'$ se expresa de distintas formas según si el sólido es lineal, superficial o volumétrico:

$$\mathrm{d}m' = \lambda\,\mathrm{d}l' \,, \quad \mathrm{d}m' = \sigma\,\mathrm{d}A' \,, \quad \mathrm{d}m' = \rho\,\mathrm{d}V' \,,$$

respectivamente.

Teorema Steiner

Si tenemos calculado el tensor de inercia con respecto al CM, llamémoslo I_{CM}, podemos calcular el tensor de inercia con respecto a otro pivote/origen $\mathcal{O}$ usando el teorema de Steiner

$$I^{ij}_{\mathcal{O}} = I^{ij}_{\mathrm{CM}} + M_{\mathrm{tot}}\left[R^2_{\mathrm{CM}}\delta_{ij} - R_{\mathrm{CM}i}R_{j\mathrm{CM}}\right] \ \text{, con } i,j \in \{1,2,3\},$$

donde $\vec{R}_{\mathrm{CM}} = (R_{\mathrm{CM}1}, R_{\mathrm{CM}2}, R_{\mathrm{CM}3})$ es el vector posición que va desde $\mathcal{O}$ a CM.

Ecuaciones de movimiento

La relación entre el momentum angular y torque de un sólido rígido es:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathcal{O}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\tau}_{\mathcal{O}},$$

donde $\vec{L}_{\mathcal{O}} = I_{\mathcal{O}}\vec{\Omega}_{\mathcal{O}}$, con $I_{\mathcal{O}}$ el tensor de inercia medido c/r al pivote $\mathcal{O}$, y $\vec{\Omega}_{\mathcal{O}}$ el vector velocidad angular del cuerpo (medido con respecto al mismo sistema de coordenadas utilizado para $I_{\mathcal{O}}$). La segunda Ley de Newton para un sólido rígido se expresa como:

$$M_{\mathrm{tot}}\ddot{\vec{R}}_{\mathrm{CM}} = \vec{F}^{\mathrm{ext}}$$

con M_{tot} la masa total, $\vec{R}_{\mathrm{CM}}$ el vector posición del centro de masa, y $\vec{F}^{\mathrm{ext}} = \sum_i \vec{F}^{\mathrm{ext}}_i$ la suma de las fuerzas externas actuando sobre el sólido rígido.

Auxiliar 23

P1

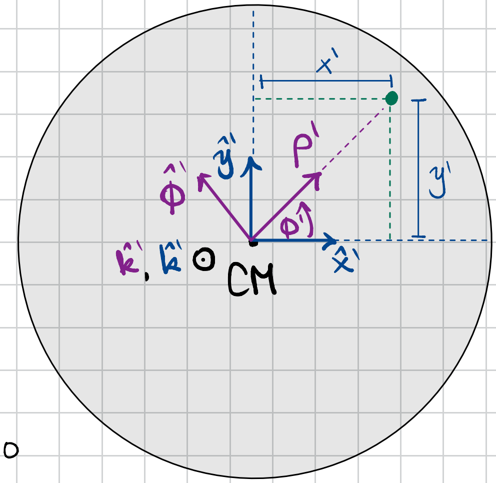


Figura 1

a) El tensor de inercia de un sólido rígido es completamente intrínseco del cuerpo, en el sentido que no depende de cómo se mueve en el problema que estemos tratando. Los momentos de inercia nos dicen qué tan difícil es hacer rotar el cuerpo con respecto a uno de sus ejes.

No obstante, el tensor de inercia sí depende del punto que utilicemos como origen para calcularlo. Físicamente, depende del "pivote" c/r al que esté girando el cuerpo. Lo que tiene sentido, no es lo mismo agarrar una vara desde su centro o desde uno de sus extremos.

Es por esto que, para calcular I_O nos olvidamos completamente del problema. Lo sacamos de donde esté y medimos/calculamos su matriz de inercia. Lo único que tenemos que tener en consideración es el punto de pivote c/r al cuál girará en el problema.

Utilizaremos la fórmula

recorre todos los puntos con masa

$$I_O^{ij} = \int ((r')^2 \delta_{ij} - x_i' x_j')\, dm' \quad (1)$$

donde pueden notar que I_O es simétrica, $I_O^{ij} = I_O^{ji}$. Lo primero es definir un sist. cartesiano solidario al cuerpo. En Figura 1 lo definimos centrado en el CM del cuerpo (esto es lo más conveniente para objetos simétricos). Sin embargo, como el objeto es un disco plano circular, nos conviene ocupar un sist. cilíndrico como $\{\hat{\rho}', \hat{\phi}', \hat{k}'\}$ de la Figura, pero como (1) está en cartesianas, debemos escribir x_i' en términos de $\{\rho', \phi'\}$. Con pitágoras,

$$x' = x_1' = \rho' \cos\phi', \quad y' = x_2' = \rho' \sin\phi', \quad z' = x_3' = z' = 0$$

el disco es plano

Ahora debemos definir dm' (con nuestro sist. cilíndrico). Como es un sólido superficial ocupamos

$$dm' = \sigma\, dA'$$

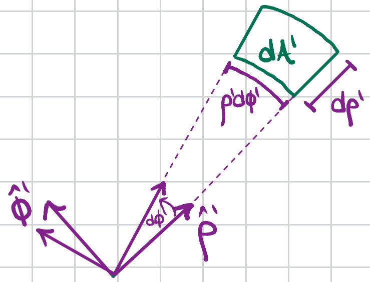


Figura 2

donde σ es la densidad de masa superficial $\sigma = M_{tot}/S = M/\pi R^2$ y dA' el diferencial de área en coord. cilíndricas, $dA' = \rho' d\phi' d\rho'$ (ver Figura 2), entonces

límites de integración

$$dm' = \frac{M}{\pi R^2} \rho' d\rho' d\phi', \quad \text{con } \rho' \in [0, R] \text{ y } \phi' \in [0, 2\pi]$$

Ya podemos reemplazar en (1), usando $\delta_{ij} = 1$ ssi $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ ~. Para el primer elemento de la diagonal

$$\triangleright\ I_{CM}^{11} = \int ((r')^2 - (x_1')^2)\, dm' = \int (\rho'^2 - \rho'^2 \cos^2\phi')\, dm' = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \rho'^3 d\rho' \int_0^{2\pi} \sin^2\phi' d\phi' = \frac{MR^2}{4}$$

y seguimos con el resto de la diagonal

$$\triangleright\ I_{CM}^{22} = \int ((r')^2 - (y')^2)\, dm' = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \rho'^3 d\rho' \int_0^{2\pi} \cos^2\phi' d\phi' = \frac{MR^2}{4}$$

$$\triangleright\ I_{CM}^{33} = \int ((r')^2 - (\overset{=0}{\cancel{z}})^2)\, dm' = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \rho'^3 d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' = \frac{MR^2}{2}$$

Ahora tenemos que calcular los 6 elementos fuera de la diagonal. No obstante, cuando tenemos cuerpos muy simétricos (como lo será en este curso) y definimos correctamente $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{k}'\}$, los elementos fuera de la diagonal son nulos. Calculémoslos,

$$\triangleright\ I_{CM}^{12} = I_{CM}^{21} = -\int x'y'\, dm' = -\frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \rho'^3 d\rho' \underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi} \cos\phi' \sin\phi' d\phi'}}_{=0} = 0$$

$$\triangleright\ I_{CM}^{13} = I_{CM}^{31} = -\int \overset{=0}{\cancel{z}}\, x'\, dm' = 0$$

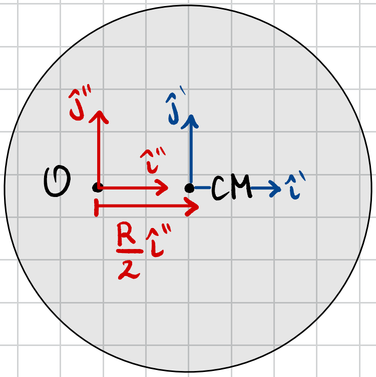
$$\triangleright\ I_{CM}^{23} = I_{CM}^{32} = -\int \overset{=0}{\cancel{z}}\, y'\, dm' = 0$$

Así que nuestro tensor de inercia medido con respecto al CM, es

$$I_{CM} = \frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Sin embargo, tenemos que adelantarnos un poco a lo que haremos. Usaremos

$$\vec{\tau}_O^{\,ext} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$



donde nos gustaría definir el origen O donde está el pivote de nuestro problema, ya que así el torque ejercido por el pivote sería nulo. En nuestro caso el pivote O está a una distacia $R/2$ hacia la izquierda del CM.

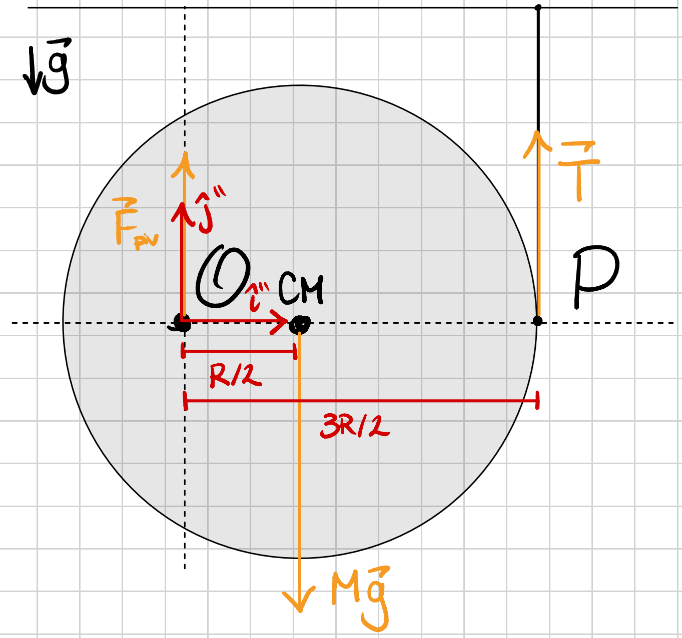
Por lo tanto, usamos Steiner para pasar de I_{CM} a I_O, de la forma

$$I_O^{ij} = I_{CM}^{ij} + M_{tot}\left[(\vec{R}_{CM})^2 \delta_{ij} - R_{CM_i} R_{CM_j}\right] \quad (3)$$

donde $\vec{R}_{CM}$ es el vector posición que va desde O a CM, en este caso $\vec{R}_{CM} = R/2\ \hat{\imath}''$, donde $\{\hat{\imath}'', \hat{j}'', \hat{k}''\}$ es exactamente el mismo sist. $\{\hat{\imath}', \hat{j}', \hat{k}'\}$, pero trasladado paralelamente (sin rotar los ejes) al punto O. Reemplazamos en (3) usando que $R_{CM_1} = R/2$ y $R_{CM_2} = R_{CM_3} = 0$, de forma matricial

$$I_O = \frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & R^2/4 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \quad (4)$$

b) Ya habiendo calculado I_O, volvemos a poner nuestro sólido en el problema de interés. Notamos que cuando está atado a la cuerda, su velocidad angular es 0, $\vec{\Omega}_O = \vec{0}$, por lo que el momentum ang. es 0,



$$\vec{L}_O = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}$$

Así que debemos expresar los torques, medidos con respecto al mismo O, y encontrar la tensión. Ocupando el set $\{\hat{i}'', \hat{j}'', \hat{k}''\}$

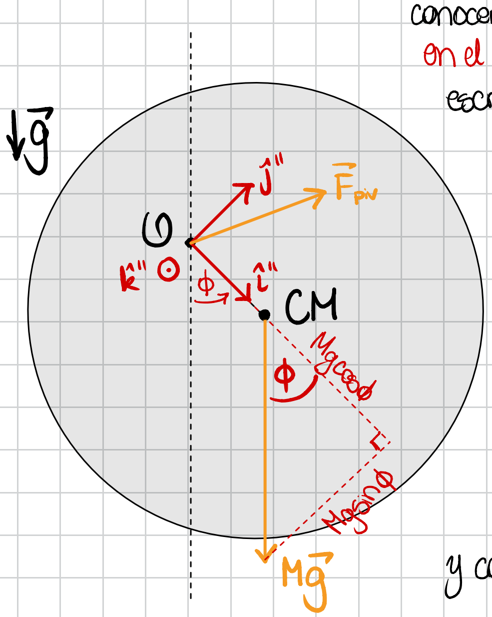
$$\vec{\tau}_O^{\,ext} = \left(\frac{R}{2}\hat{i}''\right) \times (-Mg\hat{j}'') + \left(\frac{3}{2}\hat{i}''\right) \times (T\hat{j}'')$$

$$= \frac{R}{2}(-Mg + 3T)\,\hat{k}''$$

y usando la relación torque-momentum angular

$$\frac{R}{2}(-Mg + 3T) = 0 \Rightarrow \boxed{T = \frac{Mg}{3}}$$

c) Ahora que la cuerda se corta, el disco es libre de rotar en torno a O. Recordemos que $\{\hat{i}'', \hat{j}'', \hat{k}''\}$ es solidario al cuerpo, rota junto a él, así que ahora agregamos la variable ϕ que nos indica el ángulo c/r a la vertical. Ya conocemos I_O y para calcular $\vec{L}_O$ necesitamos también $\vec{\Omega}_O$, expresado en el mismo sistema que I_O. Por regla de la mano derecha $\vec{\Omega}_O = \dot{\phi}\hat{k}''$, que escrito matricialmente es



$$\vec{\Omega}_O = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \hat{i}'' \\ \hat{j}'' \\ \hat{k}'' \end{array}$$

así que hacemos el producto matricial con I_O

$$\vec{L}_O = I_O \vec{\Omega}_O = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \frac{3MR^2}{4}\dot{\phi}\,\hat{k}''$$

y como $d\hat{k}''/dt = \vec{0}$ (siempre apunta perpendicular al plano), $d\vec{L}_O/dt = (3MR^2/4)\ddot{\phi}\,\hat{k}''$

Mientras que para el torque solo tenemos el peso $M\vec{g} = +Mg\cos\phi\,\hat{i}'' - Mg\sin\phi\,\hat{j}''$, así que

$$\vec{\tau}_O^{\,ext} = \left(\frac{R}{2}\hat{i}''\right) \times \left(Mg\cos\phi\,\hat{i}'' - Mg\cos\phi\,\hat{j}''\right) = -\frac{MgR}{2}\sin\phi\,\hat{k}'',$$

con lo que concluimos, por $\vec{\tau}_O^{\,ext} = d\vec{L}_O/dt$,

$$\ddot{\phi} + \frac{2g}{3R}\sin\phi = 0 \quad (5)$$

que tiene la forma de un péndulo simple. Integramos una vez con truco de mecánica y con C.I.s $\phi(0)=\pi/2$, $\dot\phi(0)=0$

$$\Rightarrow \int_0^{\dot\phi} \dot\phi d\dot\phi = -\frac{2g}{3R}\int_{\pi/2}^{\phi} \sin\phi d\phi$$

$$\Rightarrow \dot\phi^2 = \frac{4g}{3R}\cos\phi \quad (6)$$

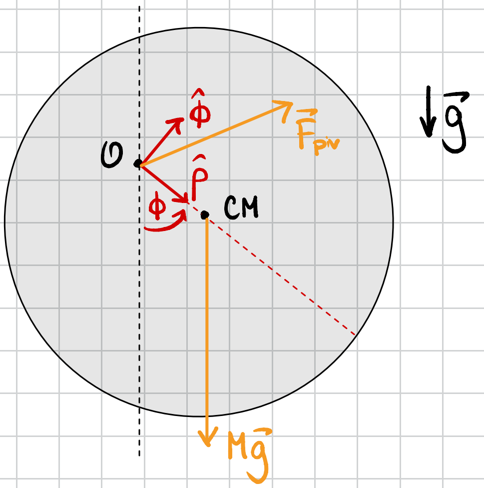
Como $\cos\phi \in [-1,1]$ la velocidad ang. máxima estaría dada en $\cos\phi^* \overset{!}{=} 1 \Rightarrow \phi^* = 0$ (cuando cruza la vertical), que evaluando en (6)

$$\boxed{\dot\phi_{max} \equiv \dot\phi(\phi^*) = \sqrt{\frac{4g}{3R}}}$$

d) Como es usual, para hacer aparecer la fuerza de pivote actuando en O, $\vec F_{piv}$, utilizamos segunda Ley de Newton para sólidos rígidos (discretos o continuos),

$$M_{tot}\ddot{\vec R}_{CM} = \sum_i \vec F_i^{ext} \quad (7)$$

donde ahora no estamos ligados a I_o y su sist. $\{\hat\imath'', \hat\jmath'', \hat k''\}$, por lo que podemos usar uno más conveniente (e inercial) como el cilíndrico $\{\hat\rho, \hat\phi, \hat k\}$, con el cual la posición del CM sería



$$\vec R_{CM} = \frac{R}{2}\hat\rho \Rightarrow \dot{\vec R}_{CM} = \frac{R}{2}\dot\phi\hat\phi \Rightarrow \ddot{\vec R}_{CM} = -\frac{R}{2}\dot\phi^2\hat\rho + \frac{R}{2}\ddot\phi\hat\phi$$

y las fuerzas estarían dadas por

$$\sum_i \vec F_i^{ext} = M\vec g + \vec F_{piv}$$

$$= Mg\cos\phi\hat\rho - Mg\sin\phi\hat\phi + F_{piv,\rho}\hat\rho + F_{piv,\phi}\hat\phi,$$

por lo que, reemplazando en (7),

$$M(-R/2\,\dot\phi^2\hat\rho + R/2\,\ddot\phi\hat\phi) = Mg\cos\phi\hat\rho - Mg\sin\phi\hat\phi + F_{piv,\rho}\hat\rho + F_{piv,\phi}\hat\phi$$

de donde obtenemos EoM escalares y podemos despejar $F_{piv,i}$:

$$\hat\rho)\quad F_{piv,\rho} = -\frac{MR}{2}\dot\phi^2 - Mg\cos\phi$$

$$\hat\phi)\quad F_{piv,\phi} = \frac{MR}{2}\ddot\phi + Mg\sin\phi$$

Como queremos $\vec F_{piv}$ en función únicamente de ϕ, reemplazamos con (5) y (6)

$$\Rightarrow \boxed{\vec F_{piv} = F_{piv,\rho}\hat\rho + F_{piv,\phi}\hat\phi = -\frac{5}{3}Mg\cos\phi\,\hat\rho + \frac{2}{3}Mg\sin\phi\,\hat\phi}$$

* Noten que $\{\hat\imath'', \hat\jmath'', \hat k''\}$ y $\{\hat\rho, \hat\phi, \hat k\}$ son exactamente iguales. Usamos el cilíndrico para no complicarnos con las derivadas temporales de $\vec R_{CM}$, ya que $\{\hat\imath'', \hat\jmath'', \hat k''\}$ sería no inercial y tendríamos que ocupar $\dot{\hat u} = \vec\Omega \times \hat u$