Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2001 – Mecánica

Auxiliar 23

Sólido rígido continuo I

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

P1.-

Considere un disco de radio R y masa M (homogéneamente distribuida) colocado en forma vertical. El sistema puede girar con roce despreciable alrededor de un eje $\mathcal{O}$ horizontal que pasa a una distancia $R/2$ del centro del disco. Inicialmente, el disco se encuentra en reposo, sujeto a una cuerda fija al punto P (ver figura.)

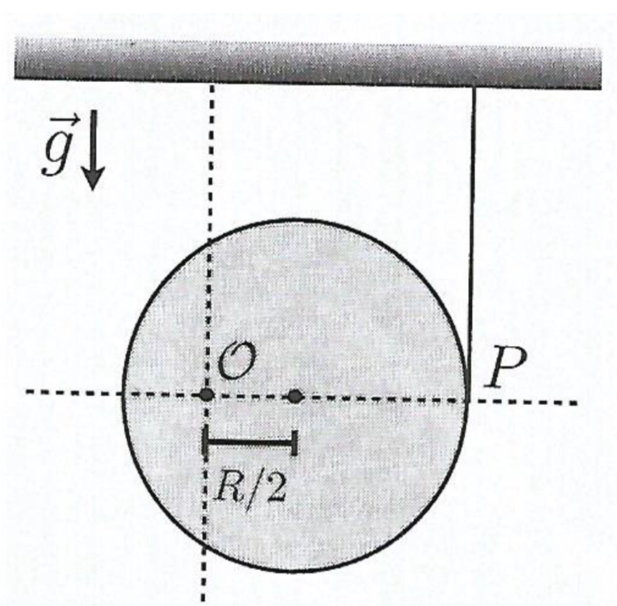
a) Calcule el tensor de inercia del disco con respecto al punto $\mathcal{O}$ por donde pasa el eje horizontal

b) Calcule la tensión de la cuerda

Ahora considere que se corta la cuerda, se pide lo siguiente:

c) Determine la velocidad angular máxima del disco en su movimiento

d) Encuentre la expresión de la fuerza que ejerce el pivote $\mathcal{O}$ sobre el disco para todo ángulo ϕ medido desde la vertical al eje $\mathcal{O}$ – CM



Formulario

Tensor de inercia

Para un sólido rígido con una distribución continua de masa (no necesariamente homogénea), su tensor de inercia tomando como pivote/origen un punto $\mathcal{O}'$, se calcula como

$$I_{\mathcal{O}'} = \int \begin{pmatrix} (y')^2 + (z')^2 & -x'y' & -x'z' \\ -y'x' & (x')^2 + (z')^2 & -y'z' \\ -z'x' & -z'y' & (x')^2 + (y')^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}m' \,,$$

que también se puede escribir como

$$I^{ij}_{\mathcal{O}'} = \int ((r')^2 \delta_{ij} - x'_i x'_j)\, \mathrm{d}m' \;, \text{ con } i,j \in \{1,2,3\}$$

donde $x'_1 = x'$, $x'_2 = y'$, $x'_3 = z'$, $(r')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

El diferencial de masa $\mathrm{d}m'$ se expresa de distintas formas según si el sólido es lineal, superficial o volumétrico:

$$\mathrm{d}m' = \lambda\, \mathrm{d}l' \,, \quad \mathrm{d}m' = \sigma\, \mathrm{d}A' \,, \quad \mathrm{d}m' = \rho\, \mathrm{d}V' \,,$$

respectivamente.

Teorema Steiner

Si tenemos calculado el tensor de inercia con respecto al CM, llamémoslo I_{CM}, podemos calcular el tensor de inercia con respecto a otro pivote/origen $\mathcal{O}$ usando el teorema de Steiner

$$I^{ij}_{\mathcal{O}} = I^{ij}_{\mathrm{CM}} + M_{\mathrm{tot}} \left[R^2_{\mathrm{CM}} \delta_{ij} - R_{\mathrm{CM}i} R_{j\mathrm{CM}} \right] \;, \text{ con } i,j \in \{1,2,3\},$$

donde $\vec{R}_{\mathrm{CM}} = (R_{\mathrm{CM}1}, R_{\mathrm{CM}2}, R_{\mathrm{CM}3})$ es el vector posición que va desde $\mathcal{O}$ a CM.

Ecuaciones de movimiento

La relación entre el momentum angular y torque de un sólido rígido es:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\mathcal{O}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\tau}_{\mathcal{O}},$$

donde $\vec{L}_{\mathcal{O}} = I_{\mathcal{O}} \vec{\Omega}_{\mathcal{O}}$, con $I_{\mathcal{O}}$ el tensor de inercia medido c/r al pivote $\mathcal{O}$, y $\vec{\Omega}_{\mathcal{O}}$ el vector velocidad angular del cuerpo (medido con respecto al mismo sistema de coordenadas utilizado para $I_{\mathcal{O}}$). La segunda Ley de Newton para un sólido rígido se expresa como:

$$M_{\mathrm{tot}} \ddot{\vec{R}}_{\mathrm{CM}} = \vec{F}^{\mathrm{ext}}$$

con M_{tot} la masa total, $\vec{R}_{\mathrm{CM}}$ el vector posición del centro de masa, y $\vec{F}^{\mathrm{ext}} = \sum_i \vec{F}^{\mathrm{ext}}_i$ la suma de las fuerzas externas actuando sobre el sólido rígido.