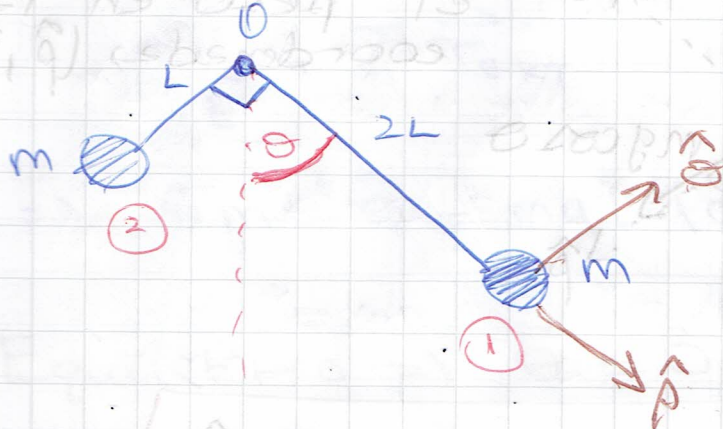


Auxiliar 21

Jueves 12-06-2025

PA

Tenemos la siguiente configuración:



Definimos los vectores unitarios polares sobre la partícula 1

Usando la base polar dados notamos

$$\vec{r}_1 = 2L\hat{\rho} \Rightarrow \vec{v}_1 = 2L\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{r}_2 = -L\hat{\theta} \Rightarrow \vec{v}_2 = L\dot{\theta}\hat{\rho}$$

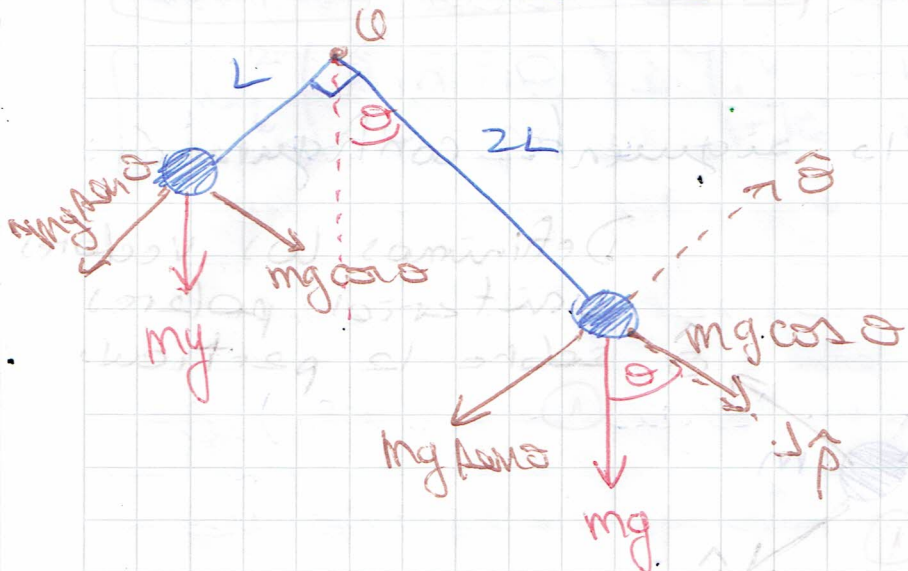
⇒ El momento angular respecto a O será:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = (m\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) + (m\vec{r}_2 \times \vec{v}_2)$$

$$\vec{L} = (4mL^2 \hat{\rho} \times \dot{\theta}\hat{\theta}) + (-mL^2 \dot{\theta} \hat{\theta} \times \hat{\rho})$$

$$\Rightarrow \vec{L} = 5mL^2\dot{\theta}\hat{z}$$

Vemos ahora el torque



Descomponemos el peso en las coordenadas $(\hat{p}, \hat{e})$

$$\vec{mg} = mg \cos \theta \hat{p} - mg \sin \theta \hat{e}$$

Luego el torque neto en torno a O será:

$$\Sigma \vec{\tau}_{\text{EXT}} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = (\vec{r}_1 \times m\vec{g}) + (\vec{r}_2 \times m\vec{g})$$

$$\Rightarrow \Sigma \vec{\tau}_{\text{EXT}} = (2L \hat{p} \times (mg \cos \theta \hat{p} - mg \sin \theta \hat{e})) + (-L \hat{e} \times (mg \cos \theta \hat{p} - mg \sin \theta \hat{e}))$$

$$\Rightarrow \Sigma \vec{\tau}_{\text{EXT}} = -2mgL \sin \theta \hat{z} + mgL \cos \theta \hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum \vec{T}_{EXT} = mgL(\cos\theta - 2\sin\theta)\hat{z}}$$

Finalmente tenemos la ecuación de movimiento del sistema desde

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{T}_{EXT}$$

$$\Rightarrow \boxed{5mL^2\ddot{\theta} = mgL(\cos\theta - 2\sin\theta)}$$

Equilibrio $\Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = \theta^*}$

$$\Rightarrow \cos\theta^* - 2\sin\theta^* = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta^* = \tan^{-1}(1/2)}$$

posición de equilibrio.

b) Buscamos la continuación frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a θ^*

$$\Rightarrow \text{hacemos } \boxed{\theta = \theta^* + \phi} \text{ con } \phi \ll \theta^*$$

o equivalentemente

$$\boxed{\theta = \theta^* + \delta\theta} \text{ (lo que más les acomode)}$$

Reemplazando en la ecuación de movimiento aparecen las funciones

$$\cos \theta = \cos(\theta^* + \phi)$$

$$\sin \theta = \sin(\theta^* + \phi)$$

Hagamos Taylor alrededor de θ^*

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta^* + \phi) = \cos \theta^* - \phi \sin \theta^* \\ \sin(\theta^* + \phi) = \sin \theta^* + \phi \cos \theta^* \end{array} \right. \quad (1)$$

por otra parte $\theta = \theta^* + \phi$

$$\Rightarrow \left\{ \ddot{\theta} = \ddot{\phi} \right. \quad (2)$$

Usando (1), (2) en la ecuación de movimiento se tiene

$$5mL^2 \ddot{\phi} = mgL [\cos \theta^* - \phi \sin \theta^* - 2\sin \theta^* + 2\phi \cos \theta^*]$$

pero usando la condición de equilibrio

$$\cos \theta^* = 2\sin \theta^*$$

$$\Rightarrow \text{se tiene } L\ddot{\phi} = -g \sin \theta^* \phi$$

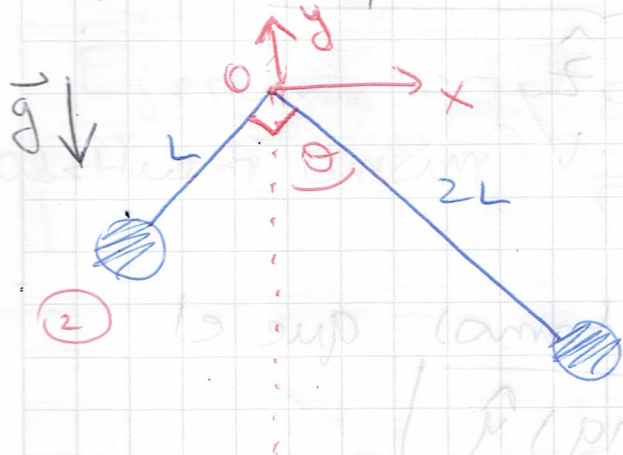
$$\Rightarrow \ddot{\phi} + \left(\frac{g \sin \theta^*}{L} \right) \phi = 0$$

M.A.S. de frecuencia

$$\omega = \sqrt{\frac{g \sin \theta^*}{L}}$$

Adicional: Notar que el problema también se puede resolver usando coordenadas cartesianas

Veamos, tenemos:



$\Rightarrow$ Definir el sistema cartesiano sobre el pivote 0.

$\Rightarrow$ Notamos en este sistema que:

$$\vec{r}_1 = 2L \sin \theta \hat{x} - 2L \cos \theta \hat{y}$$

$$\vec{r}_2 = -L \sin(\pi/2 - \theta) \hat{x} - L \cos(\pi/2 - \theta) \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_2 = -L \cos \theta \hat{x} - L \sin \theta \hat{y}$$

entonces las velocidades:

$$\vec{v}_1 = 2L\dot{\theta} [\cos\theta \hat{x} + \sin\theta \hat{y}]$$

$$\vec{v}_2 = L\dot{\theta} [\sin\theta \hat{x} - \cos\theta \hat{y}]$$

Luego es trivial mostrar que el momento angular toma la forma

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2$$

$$\Rightarrow \vec{L} = 5mL^2\dot{\theta} (\sin^2\theta \hat{z} + \cos^2\theta \hat{z})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L} = 5mL^2\dot{\theta} \hat{z}} \equiv \hat{z} \quad \checkmark \text{ mismo resultado}$$

Pero el torque no toma: que el peso es

$$\vec{mg} = (-mg)\hat{y}$$

Entonces

$$\sum \vec{\tau}_{\text{EXT}} = \vec{r}_1 \times (-mg\hat{y}) + \vec{r}_2 \times (-mg\hat{y})$$

$$\Rightarrow \sum \vec{\tau}_{\text{EXT}} = (2L \cos \theta \hat{x} - 2L \cos \theta \hat{y}) \times (-mg \hat{y}) + (-L \cos \theta \hat{x} - L \sin \theta \hat{y}) \times (-mg \hat{y})$$

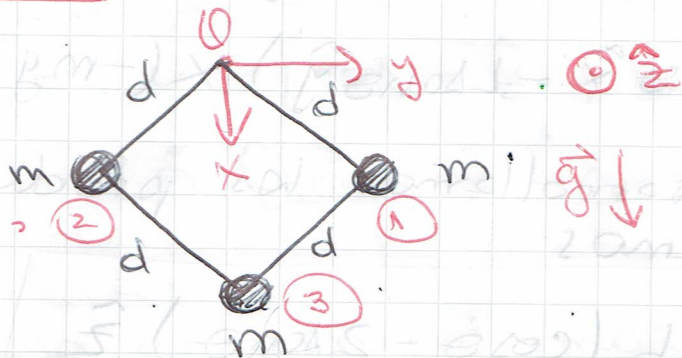
Fácilmente desarrollamos los productos cruz y tenemos

$$\boxed{\sum \vec{\tau}_{\text{EXT}} = mgL (\cos \theta - 2 \sin \theta) \hat{z}}$$

Todo igual. Lo que sigue es análogo a lo ya hecho.

Ejercicio adicional: Resuelvan el problema usando el Formalismo Lagrangiano

+ **P2** Tenemos la distribución:



a) Para calcular la matriz I necesitamos los vectores posición

al ser la figura un cuadrado es fácil notar que

$$\vec{r}_1 = d \cos(\pi/4) \hat{x} + d \sin(\pi/4) \hat{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}_1 = \frac{d}{\sqrt{2}} \hat{x} + \frac{d}{\sqrt{2}} \hat{y}}$$

$$\vec{r}_2 = d \cos(\pi/4) \hat{x} - d \sin(\pi/4) \hat{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}_2 = \frac{d}{\sqrt{2}} \hat{x} - \frac{d}{\sqrt{2}} \hat{y}}$$

$$\vec{r}_3 = 2d \cos(\pi/4) \hat{x} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_3 = \sqrt{2} d \hat{x}}$$

Luego el tensor de inercia es

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$\text{donde } I_i = \sum_j m_j \begin{pmatrix} y_j^2 + z_j^2 & -x_j y_j & -x_j z_j \\ -x_j y_j & x_j^2 + z_j^2 & -y_j z_j \\ -x_j z_j & -y_j z_j & x_j^2 + y_j^2 \end{pmatrix}$$

Y tenemos los vectores

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \text{ dados por}$$

$$\vec{r}_1 = \left(\frac{d}{\sqrt{2}}, \frac{d}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\vec{r}_2 = \left(\frac{d}{\sqrt{2}}, -\frac{d}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\vec{r}_3 = (0, 0, d)$$

Lo que se que es simplemente reemplazar con cuidado, se tiene:

$$I_1 = m \begin{pmatrix} d^2/2 & -d^2/2 & 0 \\ -d^2/2 & d^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = m \begin{pmatrix} d^2/2 & d^2/2 & 0 \\ d^2/2 & d^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix} \quad ; \quad I_3 = m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2d^2 \end{pmatrix}$$

Entonces el tensor de inercia del sistema es:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$\Rightarrow I = m \begin{pmatrix} d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4d^2 \end{pmatrix}$$

Notemos que bajo la base cartesiana I es diagonal $\Rightarrow x, y, z$ son los ejes principales.

b) A continuación usaremos que

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

Caso 1 : $\vec{\omega} = \omega_x \hat{x} \equiv \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \omega_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{L} = m \omega_x \begin{pmatrix} d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{L} = m d^2 \omega_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{L} = m d^2 \omega_x \hat{x}}$

Caso 2 : $\vec{\omega} = \omega_y \hat{y} \equiv \omega_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Comprobar que se tiene

$\vec{L} = I \vec{\omega} \Rightarrow \boxed{\vec{L} = 3m \omega_y d^2 \hat{y}}$

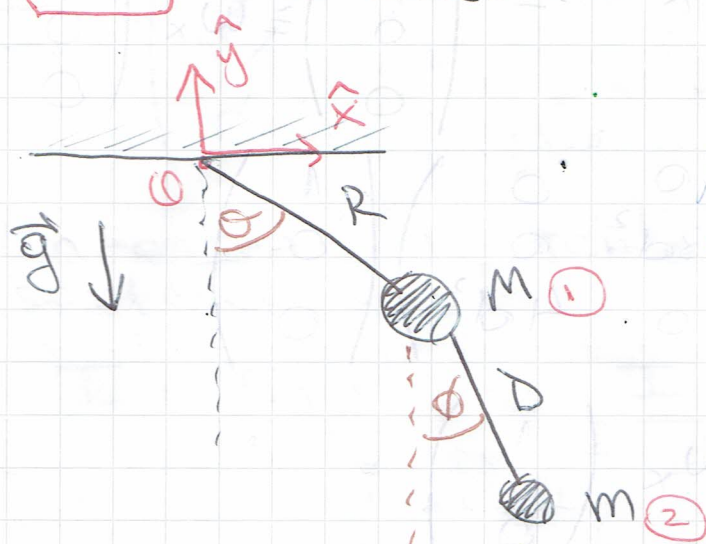
Caso 3 : $\vec{\omega} = \omega_z \hat{z} \equiv \omega_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Comprobar que se tiene

$\vec{L} = I \vec{\omega} \Rightarrow \boxed{\vec{L} = 4m d^2 \omega_z \hat{z}}$

P3

Tenemos el sistema



Voy a usar
coord. cartesianas.

en cartesianas se tiene:

$$\vec{r}_1 = R \sin \theta \hat{x} - R \cos \theta \hat{y}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + D \sin \phi \hat{x} - D \cos \phi \hat{y}$$

con $\theta = \theta(t)$ y $\phi = \phi(t)$

entonces tenemos las velocidades

$$\vec{v}_1 = R \dot{\theta} \cos \theta \hat{x} + R \dot{\theta} \sin \theta \hat{y}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + D \dot{\phi} \cos \phi \hat{x} + D \dot{\phi} \sin \phi \hat{y}$$

Necesitamos $\vec{v}_1^2$ para la energía cinética.

con $\vec{v}_1 \Rightarrow$ conocido es trivial
calcular $\vec{v}_1^2 \equiv \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1$

se tiene

$$\vec{v}_1^2 = R^2 \dot{\theta}^2$$

Ahora para $\vec{v}_2$ tenemos

$$\vec{v}_2^2 = \vec{v}_1^2 + [D\dot{\phi}(\cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y})]^2 + 2\vec{v}_1 \cdot (D\dot{\phi}(\cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}))$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2^2 = \vec{v}_1^2 + D^2\dot{\phi}^2 + 2\cancel{R\dot{\theta}}(R\dot{\theta}\cos\theta\hat{x} + R\dot{\theta}\sin\theta\hat{y}) \cdot (D\dot{\phi}\cos\phi\hat{x} + D\dot{\phi}\sin\phi\hat{y})$$

usando $\vec{v}_1^2 \equiv R^2\dot{\theta}^2$ tenemos desarrollando el último producto punto.

$$\vec{v}_2^2 = R^2\dot{\theta}^2 + D^2\dot{\phi}^2 + 2RD\dot{\theta}\dot{\phi}[\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi]$$

$$\equiv \cos(\theta - \phi)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_2^2 = R^2\dot{\theta}^2 + D^2\dot{\phi}^2 + 2RD\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi)}$$

Así tenemos la energía cinética

$$K = \frac{1}{2} M \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}_2^2$$

$$\Rightarrow K = \frac{M}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} [R^2 \dot{\theta}^2 + D^2 \dot{\phi}^2 + 2RD \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta - \phi)]$$

Fijando $U=0$ a la altura del pivote tenemos

$$U = -Mgy_1 - mgy_2 \quad \left| \begin{array}{l} y_1 = R \cos \theta \\ y_2 = R \cos \theta + D \cos \phi \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow U = -MgR \cos \theta - mg(R \cos \theta + D \cos \phi)$$

Así conocemos el Lagrangiano

$$L = K - U$$

Ecu. de movimiento para θ .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

donde $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = MR^2 \ddot{\theta} + mR^2 \ddot{\theta} + mR D \dot{\phi} \cos(\theta - \phi)$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mR D \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\theta - \phi) - MgR \sin \theta + mgR \sin \theta$$

Así tenemos reemplazando la siguiente ecuación:

$$MR^2 \ddot{\theta} + mR^2 \ddot{\theta} + mR D \dot{\phi} \cos(\theta - \phi) - mR D \dot{\phi} \sin(\theta - \phi) +$$

$$+ MgR \sin \theta + mgR \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow (M+m)R^2 \ddot{\theta} + mR D \dot{\phi} \cos(\theta - \phi) + mR D \dot{\phi}^2 \sin(\theta - \phi) + (M+m)gR \sin \theta = 0$$

Por ultimo en el limite de angulos pequeños

$$\boxed{\cos(\theta - \phi) \approx 1 ; \sin \theta \approx \theta}$$

$$\boxed{\sin(\theta - \phi) \approx \theta - \phi} ; \boxed{\phi^2 \approx 0}$$

tal que reemplazando

$$(M+m) R^2 \ddot{\theta} + m R D \ddot{\phi} + (M+m) g R \theta = 0$$

$$\Rightarrow (M+m) R [R \ddot{\theta} + g \theta] = -m R D \ddot{\phi}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \theta = -\frac{m D}{(m+M) R} \ddot{\phi}$$

pero $\phi(t) = \phi_0 \cos(\Omega t) \Rightarrow \ddot{\phi} = -\Omega^2 \phi_0 \cos \Omega t$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{m D \Omega^2}{(m+M) R} \phi_0 \cos(\Omega t)$$

Luego en la fase estacionaria θ oscila con la misma frecuencia que la de los pies

$$\Rightarrow \theta(t) = A \cos(\Omega t) \quad \xrightarrow{\text{Amplitud}}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}(t) = -A \Omega^2 \cos(\Omega t)$$

$$\text{con } \omega_0^2 = g/R$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -A\Omega^2 \cos(\Omega t) + A\omega_0^2 \cos(\Omega t) &= \\ &= \frac{mD\Omega^2}{(m+M)R} \phi_0 \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{A = \frac{mD\Omega^2 \phi_0}{(m+M)R} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}}$$

Notando así que cuando la niña mueve sus piernas con la frecuencia $\omega_0^2 = \frac{g}{R}$

$\Rightarrow$ la amplitud se comienza a dispersar.