# Control 2

P1

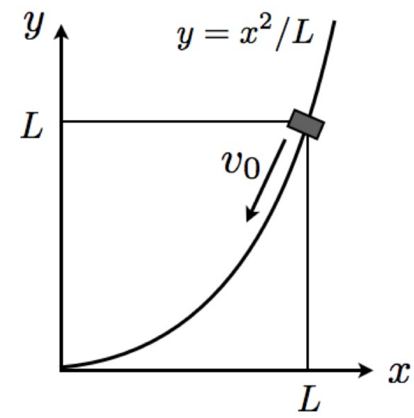
**P1:** Un anillo de masa $m$ se mueve inserto en un alambre con forma de parábola descrita por la ecuación $y = x^2/L$, donde $L$ es una constante conocida. En el instante inicial el anillo se encuentra en el punto $(L, L)$ moviéndose hacia el origen con rapidez $v_0$. Además de la fuerza que el alambre ejerce sobre anillo, actúan las siguientes dos fueras:

$$\vec{F}_1 = -Ar^2\hat{r},$$
$$\vec{F}_2 = A(y^2\hat{x} - x^2\hat{y}),$$

donde $A$ es una constante positiva conocida. Observe que $\vec{F}_1$ es una fuerza que siempre apunta hacia el origen. Desprecie la fuerza de gravedad.

**(a) 2.0pts.** Señale si $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son conservativas o no. Justifique claramente su respuesta.

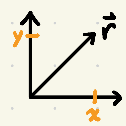
**(b) 4.0pts.** Determine la rapidez con que el anillo llega al origen.




a) Usamos el Teo.

$$\vec{F} = -\nabla U \iff \nabla \times \vec{F} = 0$$

Para $\vec{F}_1 = -Ar^2\hat{r}$ como $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$




$$\Rightarrow \vec{F}_1 = -A r^{\cancel{2}} \frac{\vec{r}}{\cancel{r}}$$

$$= -A\sqrt{x^2+y^2}\,(x\hat{x} + y\hat{y})$$

$$\Rightarrow \nabla \times F_1 = (\partial_y \cancel{F_z} - \cancel{\partial_z} F_y)\hat{x} - (\partial_x \cancel{F_z} - \cancel{\partial_z} F_x)\hat{y} + (\partial_x F_y - \partial_y F_x)\hat{z}$$

$$= \left[\partial_x\left(-Ay\sqrt{x^2+y^2}\right) - \partial_y\left(-Ax\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\hat{z}$$

$$= \left[\cancel{-Ay\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}} + \cancel{Ax\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}\right]\hat{z} = 0$$

$\therefore$ $\vec{F}_1$ es conservativa.

Para $\vec{F}_2 = A(y^2\hat{x} - x^2\hat{y})$

$$\nabla \times \vec{F}_2 = (\partial_y \cancel{F_z} - \cancel{\partial_z} F_y)\hat{x} - (\partial_x \cancel{F_z} - \cancel{\partial_z} F_x)\hat{y} + (\partial_x F_y - \partial_y F_x)\hat{z}$$

$$= \left[\partial_x(-Ax^2) - \partial_y(Ay^2)\right]\hat{z}$$

$$= -2Ax - 2Ay = -2A(x+y) \neq 0$$

$\therefore$ $\vec{F}_2$ no es conservativa.

* Para demostrar que $\vec{F}_1$ es conservativa también se puede hacer adivinando el $U$ tal que $\vec{F}_1 = -\nabla U$.

Queremos

$$\vec{F}_1 = +A\sqrt{x^2+y^2}\,(x\hat{x} + y\hat{y}) = +\partial_x U\,\hat{x} + \partial_y U\,\hat{y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_x U = Ax\sqrt{x^2+y^2} \\ \partial_y U = Ay\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

sólo varían en un término (el $x$ e $y$ fuera de $\sqrt{\ }$)
$\Rightarrow$ viene de la derivada de lo dentro de $\sqrt{\ }$

Se espera que $U = A\sqrt{x^2+y^2}^{\,n}$, así derivado por uno

$$\partial_x U = A\frac{n}{2}(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}-1}2x = Ax\sqrt{x^2+y^2} = F_{1x}$$

luego $\frac{n}{2} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow n = 3$, así

$$\partial_x U = A\frac{3}{\cancel{2}}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cancel{2}x \neq Ax\sqrt{x^2+y^2} = F_{1x}$$

No se cumple la igualdad ! Hay un 3 molestando, pero no importa, al ser const., podemos agregar un término en $U$ para cancelarlo, así

$$U = \frac{1}{3}A(x^2+y^2)^{3/2}$$

Verificamos

$$\vec{F}_1 = -\nabla\frac{1}{3}A(x^2+y^2)^{3/2}$$

$$= -\partial_x\left(\frac{1}{3}A(x^2+y^2)^{3/2}\right)\hat{x} - \partial_y\left(\frac{1}{3}A(x^2+y^2)^{3/2}\right)\hat{y}$$

$$= -\frac{1}{\cancel{3}}A\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cancel{2}x\,\hat{x} - \frac{1}{\cancel{3}}A\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cancel{2}y\,\hat{y}$$

$$= -A(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(x\hat{x} + y\hat{y})$$

**b)** Tenemos $W^{TOT}_{i\to f} = K_f - K_i$ , con $K_i = \frac{1}{2} m v_0^2$.

El trabajo de $\vec{F}_1$ de $(L,L)$ a $(0,0)$ se puede calcular de 2 formas :

▷ **FORMA 1**

Por definición

$$W^1_{i\to f} = \int_i^f \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_i^f - A\sqrt{x^2+y^2}\,(x\hat{x} + y\hat{y})\cdot d\vec{r}$$

como $d\vec{r} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y}$ e $y = \frac{x^2}{L}$ $\Rightarrow dy = \frac{2x}{L}dx$

$$W^1_{i\to f} = \int_L^0 - A\sqrt{x^2+\frac{x^4}{L^2}}\left(x\hat{x} + \frac{x^2}{L}\hat{y}\right)\cdot\left(\hat{x} + \frac{2x}{L}\hat{y}\right)dx$$

$$= \int_L^0 - A\sqrt{x^2+\frac{x^4}{L^2}}\left(x + \frac{2x^3}{L^2}\right)dx$$

$$= A\int_0^L \sqrt{1+\frac{x^2}{L^2}}\left(x^2 + \frac{2x^4}{L^2}\right)dx$$

cv : $u = 1 + \frac{x^2}{L^2}$ $\Rightarrow x = L\sqrt{u-1}$ $\quad dx = \frac{L}{2\sqrt{u-1}}du$

$$\Rightarrow W^1_{L\to 0} = A\int_1^2 \sqrt{u}\left(L^2(u-1) + \frac{2}{\cancel{L^2}}\cancel{L^4}^{\,2}(u-1)^2\right)\frac{L}{2\sqrt{u-1}}du$$

$$= A\int_1^2 \sqrt{u}\, L^2(u-1)\,(1+2(u-1))\frac{L}{2\sqrt{u-1}}du$$

$$= A\frac{L^3}{2}\int_1^2 \sqrt{u^2-u}\;(2u-1)\;du$$

cv : $v = u^2 - u$ $\Rightarrow$ $dv = (2u-1)\,du$

$$\Rightarrow W^1_{L\to 0} = A\frac{L^3}{2}\int_0^2 \sqrt{v}\,dv$$

$$= A\frac{L^3}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}u^{3/2}}{3}\Bigg|_0^2$$

$$\boxed{W^1_{L\to 0} = AL^3\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

▷ **FORMA 2**

El trabajo también se puede calcular con el potencial

$$W^1_{i\to f} = U(L,L) - U(0,0)$$

$$= \frac{1}{3}A\left(L^2+L^2\right)^{3/2} - \cancel{\frac{1}{3}A\left(0^2+0^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{3}A\,(2L^2)^{3/2}$$

$$\boxed{W^1_{i\to f} = AL^3\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

Por otro lado, el trabajo de $\vec{F}_2$ es

$$W^2_{i\to f} = \int_i^f \vec{F}_2\cdot d\vec{r}$$

con $\vec{F}_2 = A(y^2\hat{x} - x^2\hat{y})$ y $d\vec{r} = (dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y})$

reemplazando

$$W^2_{i\to f} = \int_i^f A\,(y^2\hat{x} - x^2\hat{y})\cdot(dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y})$$

$$= \int_i^f A\,(y^2dx - x^2dy)$$

como $y = \frac{x^2}{L}$ $\Rightarrow dy = \frac{2x}{L}dx$

$$W^2_{L\to 0} = \int_L^0 A\left(\frac{x^4}{L^2}dx - x^2\frac{2x}{L}dx\right)$$

$$= A\int_L^0\left(\frac{1}{L^2}x^4 - \frac{2}{L}x^3\right)dx$$

$$= A\left[\frac{1}{5}\frac{1}{L^2}x^5 - \frac{2}{L}\frac{1}{4}x^4\right]_L^0$$

$$= -A\left[\frac{1}{5}\frac{1}{\cancel{L^2}}\cancel{L^5}^{\,3} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{L}}\frac{1}{\cancel{4}_{\,2}}\cancel{L^4}^{\,3}\right]$$

$$= -A\left(\frac{1}{5}L^3 - \frac{1}{2}L^3\right)$$

$$\boxed{W^2_{L\to 0} = \frac{3}{10}AL^3}$$

Finalmente, como la normal va perpendicular a la superficie (y $d\vec{r}$), su trabajo es nulo y se tiene

$$W^{TOT}_{i\to f} = K_f - K_i$$

$$\Leftrightarrow \quad AL^3\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{10}AL^3 = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Leftrightarrow \quad v_f^2 = \left(AL^3\frac{20\sqrt{3}+9}{30} + \frac{1}{2}mv_0^2\right)\frac{2}{m}$$

$$\boxed{v_f^2 = v_0^2 + \frac{AL^3}{m}\,\frac{20\sqrt{3}+9}{15}}$$

# Problema 2

## Parte a

Para encontrar las configuraciones de equilibrio podemos tomar distintas direcciones,

- Podemos comenzar desde las ecuaciones de movimiento que son sencillas de encontrar haciendo los DCL, para la particula que se mueve en el eje $x$ se tiene

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,(x - L) - k\left(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2}L\right)\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{1}$$

  mientras para la particula que se mueve verticalmente

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k\left(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2}L\right)\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{2}$$

- Una segunda alternativa es encontrar las ecuaciones de movimiento a través del Lagrangiano del sistema, para esto notamos que la energía potencial del sistema es

$$U = \frac{1}{2}k\,(x - L)^2 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2}L\right)^2 \tag{3}$$

  mientras que la energía cinética viene dada por

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

  tal que tenemos el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}k\,(x - L)^2 - \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2}L\right)^2 \tag{4}$$

  Tenemos entonces dos variables $q_i = \{x, y\}$ para reemplazar en las ecuaciones de Euler Lagrange teniendo asi las ecuaciones de movimiento,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

  tal que usando (4) es trivial encontrar las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} m\tfrac{d^2x}{dt^2} &= -k\,(x - L) - k\left(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2}L\right)\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ m\tfrac{d^2y}{dt^2} &= -k\left(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2}L\right)\tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned} \tag{5}$$

  Desde estas ecuaciones podemos imponer la condicion de equilibrio, esto es $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = 0$ lo que nos lleva al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= -\,(x - L) - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2}L\right)\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 &= -\left(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2}L\right)\tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

notamos entonces desde la segunda ecuación dos opciones $y_{eq_1} = 0$ o $\sqrt{x_{eq_2}^2 + y_{eq_2}^2} = \sqrt{2}L$. Considerando $y_{eq_1} = 0$ en la primera ecuación se tiene explicitamente

$$0 = -\left(x_{eq_1} - L\right) - \left(x_{eq_1} - \sqrt{2}L\right)\frac{x_{eq_1}}{x_{eq_1}}$$

desde donde con un poco de algebra se tiene

$$x_{eq_1} = \frac{L}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

encontramos de esta forma un punto de equilibrio: $(x_{eq_1}, y_{eq_1}) = \left(\frac{L}{2}\left(1+\sqrt{2}\right), 0\right)$.
Por otra parte si consideramos para la segunda configuración de equilibrio $\sqrt{x_{eq_2}^2 + y_{eq_2}^2} = \sqrt{2}L$ se tiene reemplazando en la primera ecuación de movimiento

$$0 = -\left(x_{eq_2} - L\right)$$

entonces $x_{eq_2} = L$ tal que reemplazando de vuelta en la restricción $\sqrt{x_{eq_2}^2 + y_{eq_2}^2} = \sqrt{2}L \rightarrow \sqrt{L^2 + y_{eq_2}^2} = \sqrt{2}L$, elevando al cuadrado es simple despejar $y_{eq_2}$ y encontrar entonces que $y_{eq_2} = \pm L$, teniendo así dos configuraciones de equilibrio más

$$(x_{eq_2}, y_{eq_2}) = (L, \pm L)$$

En conclusión se tienen las configuraciones de equilibrio dadas por

$$(x_{eq}, y_{eq}) = \begin{cases} (L, L) \\ (L, -L) \\ \left(\frac{L}{2}\left(1+\sqrt{2}\right), 0\right) \end{cases}$$

Para estudiar si son estables o inestables podemos notar algo simple y es que justamente en las posiciones $(L, \pm L)$ ambos resortes estan en su largo natural $L$ y $\sqrt{2}L$ respectivamente, es decir que la energía potencial del sistema está en su mínimo por lo tanto las configuraciones de equilibrio estables son $(L, \pm L)$ y bajo el mismo argumento el punto de equilibrio $\left(\frac{L}{2}\left(1+\sqrt{2}\right), 0\right)$ es inestable. Alternativamente si nos vamos por el camino de mostrar estabilidad a través del potencial es necesario calcular la matriz Hessiana y calcular los autovalores concluyendo así que si todos los autovalores son positivos entonces el punto es estable y de no ser así inestable.

## Parte b

Para esto vamos a perturbar por simplicidad el punto estable $(L, L)$. Tenemos nuevamente distintos caminos posibles,

- Un camino sería ocupar directamente (5) y insertar sobre ellas las perturbaciones

$$\begin{aligned} x &= L + \delta x \\ y &= L + \delta y \end{aligned} \tag{6}$$

- Otra alternativa sería insertar esas perturbaciones directamente en el Lagrangiano (4) teniendo así las "nuevas" variables dinámicas $(\delta x, \delta y)$ sobre las cuales aplicamos Euler Lagrange y tenemos entonces las ecuaciones de movimiento asociadas a las perturbaciones.

- Por último una tercera opción es usar la "fórmula" que vieron en clases con el profe

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta x}{dt^2} + \frac{1}{m}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_e \delta x + \frac{1}{m}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right|_e \delta y = 0 \\ \frac{d^2\delta y}{dt^2} + \frac{1}{m}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_e \delta y + \frac{1}{m}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right|_e \delta x = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

  Voy a intentar desarrollar paso a paso estos tres caminos y mostrar que llevan al mismo resultado así ustedes puedan escoger el que más les acomode.

**Camino 1**

Tenemos entonces las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -k\,(x-L) - k\left(\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{2}L\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -k\left(\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{2}L\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

con un poco de algebra notamos que se pueden reescribir como

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -k\,(x-L) - k\left(x - \sqrt{2}L\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -k\left(y - \sqrt{2}L\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{aligned}$$

notamos que a la hora de reemplazar las perturbaciones el termino $1/\sqrt{x^2+y^2}$ nos va a molestar un poco, veamos paso a paso como se comporta explícitamente

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{1}{\sqrt{(L+\delta x)^2 + (L+\delta y)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{L^2+\delta x^2+2L\delta x+L^2+\delta y^2+2L\delta y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2L^2+2L\,(\delta x+\delta y)+\delta x^2+\delta y^2}} \end{aligned}$$

ahora como $\delta x, \delta y \ll 1$ entonces despreciamos los terminos cuadráticos, esto es $\delta x^2, \delta y^2 \to 0$ entonces tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2L^2+2L\,(\delta x+\delta y)}}$$

acá hacemos uso del Hint que nos da el profe en el enunciado del problema, nos dice que recordemos lo siguiente

$$\frac{1}{\sqrt{A+\epsilon}} \approx \frac{1}{\sqrt{A}}\left(1-\frac{\epsilon}{2A}\right)$$

identificamos así en nuestro caso $A = 2L^2$ y $\epsilon = 2L\left(\delta x + \delta y\right)$ entonces

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}L}\left(1-\frac{(\delta x+\delta y)}{2L}\right) \tag{8}$$

con esto ya estamos listos para perturbar las ecuaciones de movimiento. Insertando las perturbaciones en (5) se tiene

$$\begin{aligned} m\tfrac{d^2\delta x}{dt^2} &= -k\delta x - k\left(L+\delta x-\sqrt{2}L\left(L+\delta x\right)\tfrac{1}{\sqrt{(L+\delta x)^2+(L+\delta y)^2}}\right) \\ m\tfrac{d^2\delta y}{dt^2} &= -k\left(L+\delta y-\sqrt{2}L\left(L+\delta y\right)\tfrac{1}{\sqrt{(L+\delta x)^2+(L+\delta y)^2}}\right) \end{aligned}$$

reemplazamos ahora nuestra aproximación (8)

$$\begin{aligned} m\tfrac{d^2\delta x}{dt^2} &= -k\delta x - k\left(L+\delta x-\sqrt{2}L\left(L+\delta x\right)\tfrac{1}{\sqrt{2}L}\left(1-\tfrac{(\delta x+\delta y)}{2L}\right)\right) \\ m\tfrac{d^2\delta y}{dt^2} &= -k\left(L+\delta y-\sqrt{2}L\left(L+\delta y\right)\tfrac{1}{\sqrt{2}L}\left(1-\tfrac{(\delta x+\delta y)}{2L}\right)\right) \end{aligned}$$

simplificando un poco se tiene

$$\begin{aligned} m\tfrac{d^2\delta x}{dt^2} &= -k\delta x - k\left(L+\delta x-\left(L+\delta x\right)\left(1-\tfrac{(\delta x+\delta y)}{2L}\right)\right) \\ m\tfrac{d^2\delta y}{dt^2} &= -k\left(L+\delta y-\left(L+\delta y\right)\left(1-\tfrac{(\delta x+\delta y)}{2L}\right)\right) \end{aligned}$$

Ahora debemos simplemente desarrollar el producto y todos los terminos cuadráticos tipo $\delta x^2, \delta y^2, \delta x\delta y$ los despreciamos,

$$\begin{aligned} m\tfrac{d^2\delta x}{dt^2} &= -k\delta x - k\left(L+\delta x-\left(L+\delta x\right)+\tfrac{1}{2}\left(\delta x+\delta y\right)\right) \\ m\tfrac{d^2\delta y}{dt^2} &= -k\left(L+\delta y-\left(L+\delta y\right)+\tfrac{1}{2}\left(\delta x+\delta y\right)\right) \end{aligned}$$

Finalmente simplificando la expresión encontramos las ecuaciones de movimiento para las perturbaciones $\delta x, \delta y$

$$\begin{aligned} m\tfrac{d^2\delta x}{dt^2} + \tfrac{3k}{2}\delta x + \tfrac{k}{2}\delta y = 0 \\ m\tfrac{d^2\delta y}{dt^2} + \tfrac{k}{2}\delta x + \tfrac{k}{2}\delta y = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

**Camino 2**

Ahora vamos a a pescar las perturbaciones y las vamos a insertar directamente en el Lagrangiano (4) , veamos que pasa. Tenemos entonces el Lagrangiano dado por

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}k\left(x-L\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{2}L\right)^2$$

tal que insertando

$$x = L + \delta x$$
$$y = L + \delta y$$

se tiene

$$L = \frac{1}{2}m\delta\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\delta\dot{y}^2 - \frac{1}{2}k\delta x^2 - \frac{1}{2}k\left(\sqrt{(L+\delta x)^2 + (L+\delta y)^2} - \sqrt{2}L\right)^2$$

ahora nos aparece este tipo que molesta $\sqrt{(L+\delta x)^2 + (L+\delta y)^2}$ lo desarrollamos de forma analoga al caso anterior despreciando todos los terminos cuadráticos entonces se tiene

$$\sqrt{(L+\delta x)^2 + (L+\delta y)^2} \approx \sqrt{2L^2 + 2L(\delta x + \delta y)}$$

usamos el Hint que nos da el profe en el enunciado

$$\sqrt{A+\epsilon} \approx \sqrt{A} + \frac{\epsilon}{2\sqrt{A}}$$

identificamos en nuestro caso $A = 2L^2$ y $\epsilon = 2L(\delta x + \delta y)$ entonces

$$\sqrt{(L+\delta x)^2 + (L+\delta y)^2} \approx \sqrt{2}L + \frac{(\delta x + \delta y)}{\sqrt{2}}$$

Reemplazamos en el Lagrangiano y se tiene

$$L = \frac{1}{2}m\delta\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\delta\dot{y}^2 - \frac{1}{2}k\delta x^2 - \frac{1}{4}k(\delta x + \delta y)^2$$

Notar que en este camino estamos conservando terminos de orden cuadrático *en el Lagrangiano* ya que al aplicar Euler Lagrange le bajaremos la potencia en 1 teniendo así ecuaciones de movimiento lineales que es justamente lo que buscamos. Bien aclarado ese punto podemos reordenar un poco y tenemos

$$L = \frac{1}{2}m\delta\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\delta\dot{y}^2 - \frac{3}{4}k\delta x^2 - \frac{1}{4}k\delta y^2 - \frac{1}{2}k\delta x\delta y$$

y así tenemos un Lagrangiano que depende de las variables $\delta x, \delta y$ y sus primeras derivadas. Aplicamos Euler Lagrange sobre la variable $\delta x$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \delta\dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \delta x} = 0$$

tenemos entonces

$$m\frac{d^2\delta x}{dt^2} + \frac{3k}{2}\delta x + \frac{k}{2}\delta y = 0$$

Analogamente para la coordenada $\delta y$ se concluye

$$m\frac{d^2\delta y}{dt^2} + \frac{k}{2}\delta x + \frac{k}{2}\delta y = 0$$

obteniendo explicitamente los mismos resultados obtenidos desde el camino 1.

**Camino 3**

Por ultimo veamos el caso de la formula vista en clases

$$\begin{aligned}\frac{d^2\delta x}{dt^2} + \frac{1}{m}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_e \delta x + \frac{1}{m}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right|_e \delta y = 0\\ \frac{d^2\delta y}{dt^2} + \frac{1}{m}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_e \delta y + \frac{1}{m}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right|_e \delta x = 0\end{aligned}$$

desde la energía potencial (3) es trivial encontrar las segundas derivadas como sigue

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= k + k\left(1 - \frac{\sqrt{2}L}{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)\\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= k\left(1 - \frac{\sqrt{2}L}{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)\\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= \sqrt{2}Lk\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

ahora evaluando en el punto de equilibrio $(L, L)$ tenemos explicitamente

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_e &= k + k\left(1 - \frac{\sqrt{2}L}{2L^2}\left(\sqrt{2}L - \frac{L^2}{\sqrt{2}L}\right)\right)\\ \left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_e &= k\left(1 - \frac{\sqrt{2}L}{2L^2}\left(\sqrt{2}L - \frac{L^2}{\sqrt{2}L}\right)\right)\\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= -\sqrt{2}Lk\frac{L^2}{(2L^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

con un poco de algebra se tiene

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_e &= \frac{3k}{2}\\ \left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_e &= \frac{k}{2}\\ \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right|_e &= \frac{k}{2}\end{aligned}$$

finalmente reemplazamos y notamos que se llega al mismo resultado

$$\begin{aligned}m\frac{d^2\delta x}{dt^2} + \frac{3k}{2}\delta x + \frac{k}{2}\delta y = 0\\ m\frac{d^2\delta y}{dt^2} + \frac{k}{2}\delta x + \frac{k}{2}\delta y = 0\end{aligned} \tag{10}$$

## Parte c

Definiendo el vector

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$$

podemos reescribir (10) como

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{k}{2m}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nuestra propuesta de solución es entonces una oscilatoria tipo $\vec{r} \sim r_0 e^{i\omega t}$ (o puede ser $\cos(\omega t)$ o $\sin(\omega t)$ da igual, al reemplazar este candidato en la ecuación se llega a lo mismo) tal que reemplazando se tiene

$$\left[\begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} + \frac{k}{2m}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] r_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

buscamos entonces una solución no trivial, esto es que la matriz en el corchete $[\cdots]$ sea no invertible lo cual ocurre cuando el determinante de dicha matriz es nulo, por lo tanto tenemos la restricción

$$\det\left[\begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} + \frac{k}{2m}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

podemos reescribir esto como

$$\det\begin{pmatrix} \frac{3k}{2m} - \omega^2 & \frac{k}{2m} \\ \frac{k}{2m} & \frac{k}{2m} - \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

desarrollando se llega a la ecuación

$$\omega^4 - 4\left(\frac{k}{2m}\right)^2 \omega^2 + 2\left(\frac{k}{2m}\right)^4 = 0$$

una simple ecuación cuadrática para $\omega^2$ entonces finalmente encontramos las frecuencias de oscilación

$$\omega_\pm^2 = \left(2 \pm \sqrt{2}\right)\frac{k}{2m}$$

Por ultimo necesitamos encontrar el vector $r_0$, digamos $r_0 = \begin{pmatrix} A_\pm \\ B_\pm \end{pmatrix}$ con el subindice $\pm$ indicando la frecuencia $\omega_\pm^2$. Para encontrarlo necesitamos volver a nuestra ecuación (11) y reemplazar los autovalores que encontramos $\omega_\pm^2$ para hallar su autovector respectivo. Usando $\omega_+^2 = \left(2 + \sqrt{2}\right)\frac{k}{2m}$ se tiene

$$\left[\begin{pmatrix} -\omega_+^2 & 0 \\ 0 & -\omega_+^2 \end{pmatrix} + \frac{k}{2m}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} A_+ \\ B_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tal que reemplazando $\omega_+^2$ podemos encontrar lo siguiente

$$\begin{pmatrix} \left(1 - \sqrt{2}\right)\frac{k}{2m} & \frac{k}{2m} \\ \frac{k}{2m} & -\left(1 + \sqrt{2}\right)\frac{k}{2m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_+ \\ B_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo que nos lleva al sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{c} \left(1 - \sqrt{2}\right)\frac{k}{2m}A_+ + \frac{k}{2m}B_+ = 0 \\ \frac{k}{2m}A_+ - \left(1 + \sqrt{2}\right)\frac{k}{2m}B_+ = 0 \end{array}$$

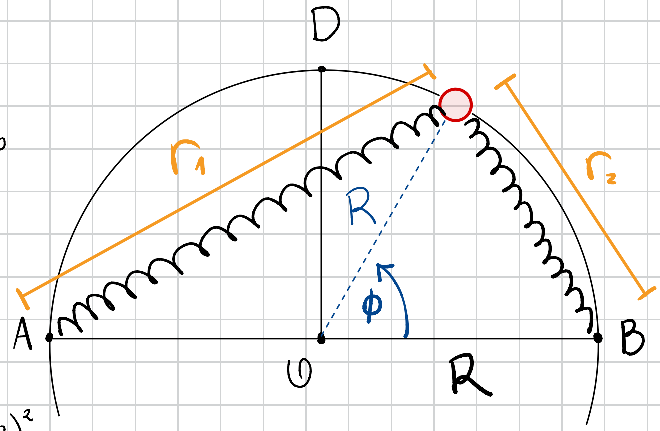
desde donde concluimos que $A_+ = \left(1 + \sqrt{2}\right)B_+$ entonces el autovector asociado a $\omega_+^2$ es

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ B_+ \end{pmatrix} = B_+\begin{pmatrix} \left(1 + \sqrt{2}\right) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

con $B_+$ un factor de normalización despreciable. Analogamente se puede mostrar que para $\omega_-^2$ encontramos el autovector asociado es

$$\begin{pmatrix} A_- \\ B_- \end{pmatrix} = A_- \begin{pmatrix} 1 \\ -\left(1+\sqrt{2}\right) \end{pmatrix} \tag{13}$$

# P3




**a)** (+1.5) Solo tenemos potencial elástico. El largo de los resortes está dado por

$$r_1 = \sqrt{2}R\sqrt{1+\cos\phi}, \qquad r_2 = \sqrt{2}R\sqrt{2-\cos\phi}$$

entonces los potenciales son

$$U_{tot} = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}kR^2\left(\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\phi} - 1/2\right)^2 + \frac{1}{2}kR^2\left(\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\phi} - 1/2\right)^2$$

**b)** La energía cinética está dada por

$$K = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2\right) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2$$

entonces el Lagrangiano es

$$L = K - U_{tot} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}kR^2\left(\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\phi} - 1/2\right)^2 - \frac{1}{2}kR^2\left(\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\phi} - 1/2\right)^2$$

y las ecs. E-L,

▷ $$\frac{\partial L}{\partial \phi} = kR^2\left(\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\phi} - 1/2\right)\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\sin\phi}{\sqrt{1+\cos\phi}} - kR^2\left(\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\phi} - 1/2\right)\frac{\sqrt{2}\sin\phi}{2\sqrt{1-\cos\phi}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}kR^2}{4}\sin\phi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\cos\phi}} - \frac{1}{\sqrt{1+\cos\phi}}\right)$$

▷ $$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mR^2\dot{\phi} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \iff mR^2\ddot{\phi} - \frac{\sqrt{2}kR^2}{4}\sin\phi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\cos\phi}} - \frac{1}{\sqrt{1+\cos\phi}}\right) = 0 \quad (1)$$

**c)** Los puntos de equilibrio se dan cuando $\dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$. Imponiendo esto en (1)

$$\Rightarrow \sin\phi_{eq} = 0 \quad \vee \quad -\cos\phi_{eq} = \cos\phi_{eq}$$

De la primera opción tenemos que $\phi_{eq} = 0, \pi$, pero por indicación lo ignoramos. De la segunda opción

$$\phi_{eq} = \pi/2 \quad \vee \quad 3\pi/2$$

donde nos quedamos solo con $\phi_{eq} = \pi/2$

**d)** Haremos pequeñas oscilaciones con $\phi(t) = \pi/2 + \delta\phi(t)$, con $|\delta\phi(t)| \ll 1$. Para la aceleración es simplemente

$$\ddot{\phi} = \ddot{\delta\phi}$$

y para la el segundo término de (1) hacemos Taylor

$$\sin\phi \frac{1}{\sqrt{1\pm\cos\phi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d}{d\phi^n}\left[\sin\phi \frac{1}{\sqrt{1\pm\cos\phi}}\right]_{\phi=\pi/2} \cdot \delta\phi^n$$

$$= 1 + \frac{d}{d\phi}\left[\sin\phi \frac{1}{\sqrt{1\pm\cos\phi}}\right]_{\phi=\pi/2} \delta\phi + \cancel{\mathcal{O}(\delta\phi^2)}^{\sim 0}$$

$$= 1 \pm \frac{1}{2}\delta\phi$$

Así que

$$\ddot{\delta\phi} + \frac{\sqrt{2}k}{4m}\delta\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_0^2 = \frac{\sqrt{2}k}{4m}}$$

**e)** Ocuparemos conservación de la energía mecánica

$$E = K + U_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kR^2\left(\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\phi} - 1/2\right)^2 + \frac{1}{2}kR^2\left(\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\phi} - 1/2\right)^2$$

donde

$$E_D = \frac{1}{2}mv_0^2 + kR^2\left(\sqrt{2} - 1/2\right)^2 \quad \text{y} \quad E_B = \frac{1}{2}m\frac{v_0^2}{4} + \frac{5kR^2}{4}$$

que igualando

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + kR^2(\sqrt{2} - 1/2)^2 = \frac{1}{2}m\frac{v_0^2}{4} + \frac{5kR^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow v_0^2 = \frac{8}{3m}kR^2(\sqrt{2} - 1)$$