Auxiliar 19

SRNI III, Momento angular y Torque

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

P1.-

El brazo horizontal $\mathcal{OA}$ de la figura, de longitud L, gira en torno al origen $\mathcal{O}$ con velocidad angular $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$ constante, donde $\hat{z}$ es un vector unitario que apunta verticalmente hacia arriba. El extremo A del brazo sostiene una plataforma horizontal con forma de disco, de radio R y a una altura h, la cual gira en torno al eje $A\mathcal{O}'$ con velocidad angular $\vec{\Omega} = \Omega_0 \hat{z}'$ constante con respecto al sistema inercial fijo S. Considere como sistema no-inercial S' a aquel solidario a la plataforma, con origen en $\mathcal{O}'$ y vectores unitarios $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ (ver figura). Inicialmente, en $t = 0$, tanto el brazo como $\hat{x}'$ apuntan en la dirección $\hat{x}$ del sistema S. En $t = 0$, una persona parada sobre la plataforma, libera en $\mathcal{O}'$ una masa m desde el reposo sobre la plataforma (es decir: $\vec{r}' = 0$ y $\vec{v}' = 0$). Hay gravedad, pero no hay roce entre la masa m y la plataforma.

(a) Escriba expresiones para las fuerzas no inerciales asociadas al sistema S'. Exprésela en términos de las coordenadas (x', y') y vectores unitarios $\hat{x}'$ e $\hat{y}'$ solidarios a la plataforma.

(b) Escriba las dos ecuaciones escalares que describen el movimiento de la partícula para x' e y'.

(c) Considere el caso particular $\Omega_0 = \omega_0$. Encuentre la solución $x'(t), y'(t)$ para $t > 0$ antes de que la masa deslice fuera de la plataforma.

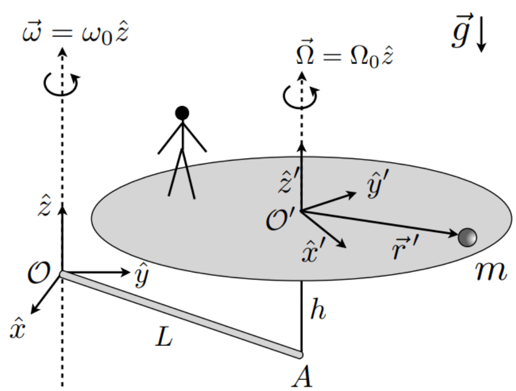


Figura 1: Pregunta 1

P2.-

Una varilla rígida, sin masa, de largo $3D$, tiene dos masas idénticas puntuales en sus extremos, y puede girar en torno a una rótula montada sobre un soporte (punto $\mathcal{O}$ de la figura). La ubicación de la rótula es tal que una de las masas se mantiene a una distancia D, mientras que la otra lo está a una distancia $2D$ de ella. El ángulo entre la parte más larga de la varilla y la horizontal es ϕ. La varilla se suelta desde el reposo cuando $\phi = \pi/4$.

(a) Determine el momento angular total $\vec{L}_{\mathcal{O}}$ y el torque total $\vec{\tau}_{\mathcal{O}}$ del sistema con respecto a $\mathcal{O}$.

(b) Encuentre la ecuación de movimiento satisfecha por ϕ. Determine el valor de $\dot{\phi}$ cuando $\phi = 0$.

(c) Determine la aceleración del centro de masas del sistema con respecto a $\mathcal{O}$. Use este resultado para encontrar la fuerza que ejerce $\mathcal{O}$ sobre la varilla cuando $\phi = 0$.

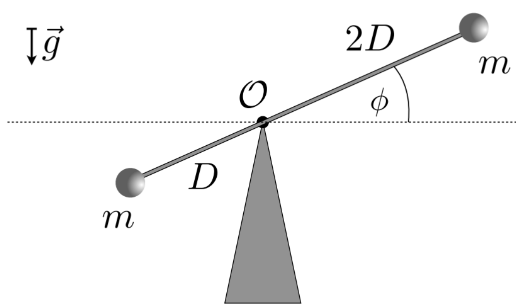


Figura 2: Pregunta 2

Formulario

Sistema de referencia no inercial

La ecuación de movimiento para el SRNI S' es

$$m\ddot{\vec{r}}' = \underbrace{\vec{F}}_{\text{reales}} \quad \underbrace{-m\ddot{\vec{R}}}_{\text{traslacional}} \quad \underbrace{-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')}_{\text{centrífuga}} \quad \underbrace{-2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}'}_{\text{Coriolis}} \quad \underbrace{-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'}_{\text{Euler}}$$

donde

- $\vec{F}$ es la suma de las fuerzas **reales** aplicadas sobre la partícula.
- $\vec{R}$ vector que va desde el origen de S al origen de S'.
- $\vec{\Omega}$ velocidad angular con la que giran los ejes *cartesianos* de S' c/r a los de S.
- $\vec{r}'$ vector que va desde el origen de S' hasta la partícula.

Momento angular y Torque

El **momento angular** de una partícula de masa m, con respecto a un punto P fijo, se define como

$$\vec{L}_P = m(\vec{r} - \vec{r}_P) \times \vec{v}$$

El **torque** debido a una fuerza $\vec{F}_a$, con respecto al punto P fijo es

$$\vec{\tau}_{P,a} = (\vec{r} - \vec{r}_P) \times \vec{F}_a$$

Así, el torque total con respecto a un punto P es la suma de todos los torques individuales:

$$\vec{\tau}_P = \sum_a \vec{\tau}_{P,a}$$

usando la segunda ley de Neton, se llega a la relación

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_P = \vec{\tau}_P$$

Aux 19: SRNI, $\vec{L}_P$ y $\vec{\tau}_P$

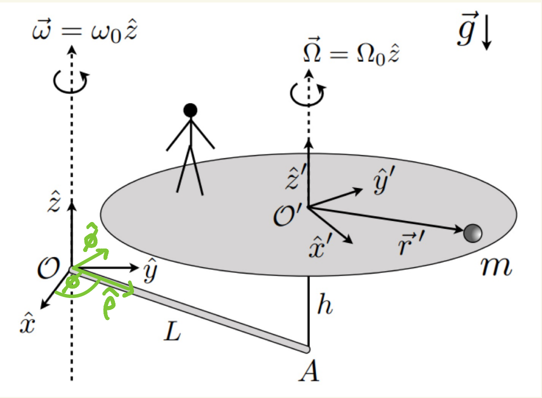
P1]

El brazo horizontal $\mathcal{OA}$ de la figura, de longitud L, gira en torno al origen $\mathcal{O}$ con velocidad angular $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$ constante, donde $\hat{z}$ es un vector unitario que apunta verticalmente hacia arriba. El extremo A del brazo sostiene una plataforma horizontal con forma de disco, de radio R y a una altura h, la cual gira en torno al eje $A\mathcal{O}'$ con velocidad angular $\vec{\Omega} = \Omega_0 \hat{z}'$ constante con respecto al sistema inercial fijo S. Considere como sistema no-inercial S' a aquel solidario a la plataforma, con origen en $\mathcal{O}'$ y vectores unitarios $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ (ver figura). Inicialmente, en $t = 0$, tanto el brazo como $\hat{x}'$ apuntan en la dirección $\hat{x}$ del sistema S. En $t = 0$, una persona parada sobre la plataforma, libera en $\mathcal{O}'$ una masa m desde el reposo sobre la plataforma (es decir: $\vec{r}' = 0$ y $\vec{v}' = 0$). Hay gravedad, pero no hay roce entre la masa m y la plataforma.

(a) Escriba expresiones para las fuerzas no inerciales asociadas al sistema S'. Exprésela en términos de las coordenadas (x', y') y vectores unitarios $\hat{x}'$ e $\hat{y}'$ solidarios a la plataforma.

(b) Escriba las dos ecuaciones escalares que describen el movimiento de la partícula para x' e y'.

(c) Considere el caso particular $\Omega_0 = \omega_0$. Encuentre la solución $x'(t), y'(t)$ para $t > 0$ antes de que la masa deslice fuera de la plataforma.



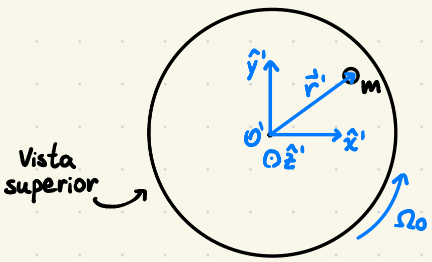
(a) Recordando la ecuación para SRNI

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') - 2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' \quad \rightarrow \text{F. ficticias}$$

① ② ③ ④

Como nos dieron las bases y orígenes, vamos directo a calcular los vectores.

① Posición $\vec{r}'$ de la masa c/r a $\mathcal{O}'$.



$$\vec{r}' = x'\hat{x}' + y'\hat{y}'$$
$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}' = \dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}'$$
$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}'\hat{x} + \ddot{y}'\hat{y}'$$

③ Posición $\vec{R}$ de $\mathcal{O}'$ c/r a $\mathcal{O}$. Definimos un vector auxiliar $\hat{\rho}$ y sea ϕ el ángulo entre $\hat{\rho}$ y $\hat{x}$.

$$\vec{R} = L\hat{\rho} + h\hat{z} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{R}} = L\dot{\phi}\hat{\phi} = L\omega_0\hat{\phi} \quad (\dot{\phi} = \omega_0)$$

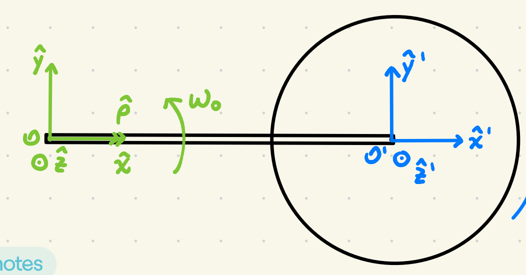
$$\Rightarrow \quad \ddot{\vec{R}} = -L\omega_0\dot{\phi}\hat{\rho} = -L\omega_0^2\hat{\rho}$$

④ Velocidad angular $\vec{\Omega}$ que gira S' c/r a S

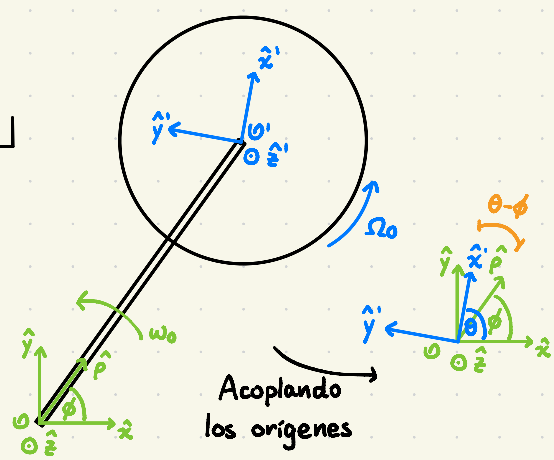
$$\vec{\Omega} = \Omega_0\hat{z} = \omega_0\hat{z}' \quad (\hat{z} = \hat{z}') \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{\Omega}} = 0$$

Expresando todos los vectores en sistema S', tenemos por geometría que de vista superior

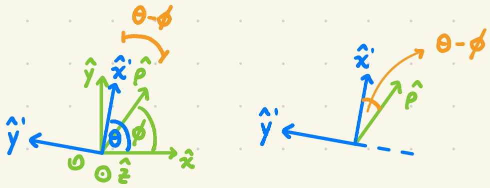
t=0|



t>0|



Luego, es usar trigonometría típica



$$\hat{\rho} = \cos(\theta-\phi)\,\hat{x}' - \sin(\theta-\phi)\,\hat{y}'$$

Notar que θ y ϕ no son conocidos, pero se pueden obtener del enunciado

$$\omega_0 = \frac{d\phi}{dt} \quad / \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \phi = \omega_0 t$$

$$\Omega_0 = \frac{d\theta}{dt} \quad / \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \theta = \Omega_0 t$$

reemplazando en $\hat{\rho}$

$$\hat{\rho} = \cos(\Omega_0 t - \omega_0 t)\,\hat{x}' - \sin(\Omega_0 t - \omega_0 t)\,\hat{y}' = \cos[(\Omega_0-\omega_0)t]\,\hat{x}' - \sin[(\Omega_0-\omega_0)t]\,\hat{y}'$$

reemplazando en $\ddot{\vec{R}}$

$$\boxed{\ddot{\vec{R}} = -L\omega_0^2\hat{\rho} = -L\omega_0^2\left\{\cos[(\Omega_0-\omega_0)t]\,\hat{x}' - \sin[(\Omega_0-\omega_0)t]\,\hat{y}'\right\}}$$

Así, obtenemos cada fuerza ficticia.

(F. traslacional) $-m\ddot{\vec{R}} = +mL\omega_0^2\left\{\cos[(\Omega_0-\omega_0)t]\,\hat{x}' - \sin[(\Omega_0-\omega_0)t]\,\hat{y}'\right\}$

(F. centrífuga) $-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = -m\,\Omega_0\hat{z}'\times\left(\Omega_0\hat{z}'\times(x'\hat{x}'+y'\hat{y}')\right)$

$$= -m\Omega_0^2\,\hat{z}'\times(x'\hat{y}'-y'\hat{x}')$$

$$= -m\Omega_0^2(-x'\hat{x}'-y'\hat{y}')$$

$$= m\Omega_0^2(x'\hat{x}'+y'\hat{y}')$$

(F. Coriolis) $-2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' = -2m\Omega_0\hat{z}'\times(\dot{x}'\hat{x}'+\dot{y}'\hat{y}')$

$$= -2m\Omega_0(\dot{x}'\hat{y}'-\dot{y}'\hat{x}')$$

$$= 2m\Omega_0(\dot{y}'\hat{x}'-\dot{x}'\hat{y}')$$

(F. Euler) $-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' = -m\cdot 0\times(x'\hat{x}'+y'\hat{y}') = 0$

(b) Para obtener los EOMs, necesitamos descubrir el término faltante $\vec{F}$ de la ecuación. En este caso,

$$\vec{F} = -mg\,\hat{z}' + N\hat{z}' = (N-mg)\hat{z}'$$

y podemos reemplazar

$$m(\ddot{x}'\hat{x}'+\ddot{y}'\hat{y}') = (N-mg)\hat{z}' + mL\omega_0^2\left\{\cos[(\Omega_0-\omega_0)t]\,\hat{x}' - \sin[(\Omega_0-\omega_0)t]\,\hat{y}'\right\} + m\Omega_0^2(x'\hat{x}'+y'\hat{y}') + 2m\Omega_0(\dot{y}'\hat{x}'-\dot{x}'\hat{y}')$$

Por componentes

$$\boxed{\hat{x}'}\quad \cancel{m}\ddot{x}' = \cancel{m}L\omega_0^2\cos[(\Omega_0-\omega_0)t] + \cancel{m}\Omega_0^2 x' + 2\cancel{m}\Omega_0\dot{y}' \iff \ddot{x}' = L\omega_0^2\cos[(\Omega_0-\omega_0)t] + \Omega_0^2 x' + 2\Omega_0\dot{y}'$$

$$\boxed{\hat{y}'}\quad \cancel{m}\ddot{y}' = -\cancel{m}L\omega_0^2\sin[(\Omega_0-\omega_0)t] + \cancel{m}\Omega_0^2 y' - 2\cancel{m}\Omega_0\dot{x}' \iff \ddot{y}' = -L\omega_0^2\sin[(\Omega_0-\omega_0)t] + \Omega_0^2 y' - 2\Omega_0\dot{x}'$$

$$\boxed{\hat{z}'}\quad 0 = (N - mg)$$

(c) Considerando $\Omega_0 = \omega_0$, luego $\Omega_0 - \omega_0 = 0$ y las ecuaciones se simplifican en

$$\begin{aligned} \ddot{x}' &= L\omega_0^2\overset{1}{\cancel{\cos}}[\overset{0}{\cancel{(\Omega_0-\omega_0)}}t] + \Omega_0^2 x' + 2\Omega_0\dot{y}' \\ \ddot{y}' &= -L\omega_0^2\overset{0}{\cancel{\sin}}[\overset{0}{\cancel{(\Omega_0-\omega_0)}}t] + \Omega_0^2 y' - 2\Omega_0\dot{x}' \end{aligned} \iff \begin{aligned} \ddot{x}' &= L\Omega_0^2 + \Omega_0^2 x' + 2\Omega_0\dot{y}' \\ \ddot{y}' &= \Omega_0^2 y' - 2\Omega_0\dot{x}' \end{aligned}$$

y se puede resolver según lo aprendido en EDO (creo ? no estoy muy segura)

$$\begin{cases} \ddot{x}' - \Omega_0^2 x' - 2\Omega_0\dot{y}' = L\Omega_0^2 \\ \ddot{y}' - \Omega_0^2 y' + 2\Omega_0\dot{x}' = 0 \end{cases}$$

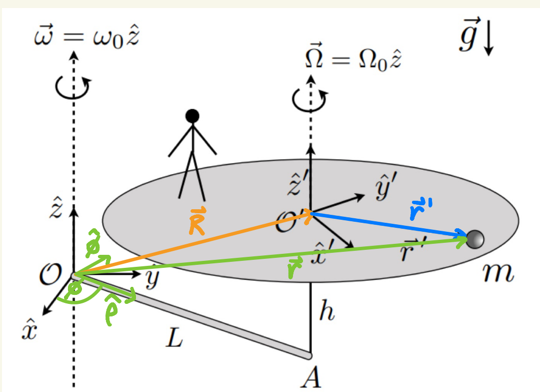
... pero no me acuerdo cómo hacerlo, así que vamos por otro camino físico.

→ La condición inicial de la masa es $(t=0)$

$x'(0) = y'(0) = 0$ → parte del origen $\Rightarrow \vec{r}\,' = 0$

$\dot{x}'(0) = \dot{y}'(0) = 0$ → parte del reposo $\Rightarrow \dot{\vec{r}}\,' = 0$

Usando el sistema de referencia inercial S, tenemos que la posición de la masa es



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$$

donde $\vec{R} = L\hat{\rho} + h\hat{z}$ y expresando $\hat{\rho}$ en sistema S,

$$\hat{\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y} = \cos(\omega_0 t)\,\hat{x} + \sin(\omega_0 t)\,\hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{R} = L[\cos(\omega_0 t)\,\hat{x} + \sin(\omega_0 t)\,\hat{y}] + h\hat{z}$$

En $t=0$, la partícula está en

$$\vec{r}(0) = \vec{R}(0) + \overset{0}{\cancel{\vec{r}\,'(0)}} = L[\overset{1}{\cancel{\cos(\omega_0\cdot 0)}}\,\hat{x} + \overset{0}{\cancel{\sin(\omega_0\cdot 0)}}\,\hat{y}] + h\hat{z} = L\hat{x} + h\hat{z}$$

Por otro lado, la velocidad inicial es (según S)

$$\dot{\vec{r}}(0) = \dot{\vec{R}}(0) + \overset{0}{\cancel{\dot{\vec{r}}\,'(0)}} = \frac{d}{dt}\{L[\cos(\omega_0 t)\,\hat{x} + \sin(\omega_0 t)\,\hat{y}] + h\hat{z}\}(0)$$

$$= L\omega_0[-\overset{0}{\cancel{\sin(\omega_0\cdot 0)}}\,\hat{x} + \overset{1}{\cancel{\cos(\omega_0 t)}}\,\hat{y}] = L\omega_0\,\hat{y}$$

Es decir, en el instante 0, la masa tiene una velocidad inicial (en S) igual a la velocidad del centro del disco (porque $\vec{r}\,'(0)=0$).

Luego, al no presentar fuerzas reales en $\hat{y}$ (sólo existe $m\vec{g}$ y $\vec{N}$, pero están en $\hat{z}$), quiere decir que NO hay aceleración en el plano horizontal, así,

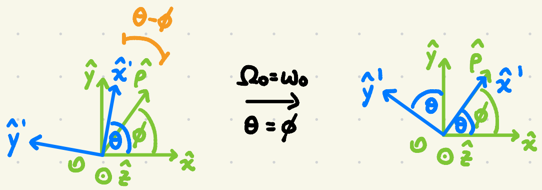
$$\ddot{\vec{r}} = 0 \underset{\text{no hay variación de velocidad}}{\Rightarrow} \dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{r}}(0) = \underbrace{L\omega_0\,\hat{y}}_{\text{cte}}$$

De esta forma, se obtiene un movimiento rectilíneo uniforme (MRU), pues la única velocidad que existe es constante ($L\omega_0$) y va en $\hat{y}$ (que no varía en el tiempo).

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + t\cdot\dot{\vec{r}}(0) = L\hat{x} + h\hat{z} + t\,L\omega_0\,\hat{y}$$

⚠ MUCHO CUIDADO!! La partícula hace MRU con respecto al sistema inercial S, no quiere decir que hace MRU con respecto al disco.

Expresando $\hat{x}$ e $\hat{y}$ en función de $\hat{x}'$ e $\hat{y}'$, a partir del dibujo que hemos hecho



$$\hat{x} = \cos\theta\,\hat{x}' - \sin\theta\,\hat{y}' \overset{\theta=\Omega_0 t}{=} \cos(\Omega_0 t)\,\hat{x}' - \sin(\Omega_0 t)\,\hat{y}'$$
$$\hat{y} = \sin\theta\,\hat{x}' + \cos\theta\,\hat{y}' = \sin(\Omega_0 t)\,\hat{x}' + \cos(\Omega_0 t)\,\hat{y}'$$

Reemplazando en $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = L\left[\cos(\Omega_0 t)\hat{x}' - \sin(\Omega_0 t)\hat{y}'\right] + h\hat{z} + tL\omega_0\left[\sin(\Omega_0 t)\hat{x}' + \cos(\Omega_0 t)\hat{y}'\right] \qquad (1)$$

Ahora, recordando que nos piden x' e y', notamos que podemos expresar el mismo $\vec{r}$, pero con las bases del sistema no inercial S'

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,' = L\hat{\rho} + h\hat{z} + x'\hat{x}' + y'\hat{y}'$$

donde $\hat{\rho}$ ya lo hemos calculado en función de $\hat{x}'$ e $\hat{y}'$

$$\hat{\rho} = \overset{1}{\cancel{\cos[\underbrace{(\Omega_0-\omega_0)}_{\Omega_0=\omega_0}t]}}\,\hat{x}' - \overset{0}{\cancel{\sin[\underbrace{(\Omega_0-\omega_0)}_{\Omega_0=\omega_0}t]}}\,\hat{y}' = \hat{x}'$$

reemplazamos,

$$\vec{r}(t) = L\hat{x}' + h\hat{z} + x'\hat{x}' + y'\hat{y}' \qquad (2)$$

Finalmente, igualando (1) y (2) y separando por componentes, llegamos a

$$L\left[\cos(\Omega_0 t)\hat{x}' - \sin(\Omega_0 t)\hat{y}'\right] + h\hat{z} + tL\omega_0\left[\sin(\Omega_0 t)\hat{x}' + \cos(\Omega_0 t)\hat{y}'\right] = L\hat{x}' + h\hat{z} + x'\hat{x}' + y'\hat{y}'$$

$\hat{x}'$ | $\boxed{x'(t) = L\cos(\Omega_0 t) + tL\omega_0\sin(\Omega_0 t) - L}$

$\hat{y}'$ | $\boxed{y'(t) = -L\sin(\Omega_0 t) + tL\omega_0\cos(\Omega_0 t)}$

P2

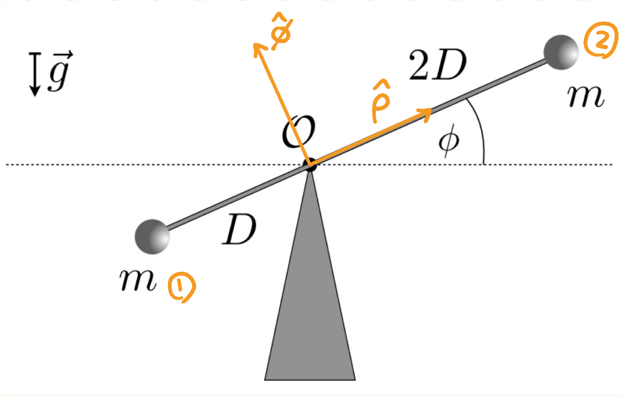
Una varilla rígida, sin masa, de largo $3D$, tiene dos masas idénticas puntuales en sus extremos, y puede girar en torno a una rótula montada sobre un soporte (punto $\mathcal{O}$ de la figura). La ubicación de la rótula es tal que una de las masas se mantiene a una distancia D, mientras que la otra lo está a una distancia $2D$ de ella. El ángulo entre la parte más larga de la varilla y la horizontal es ϕ. La varilla se suelta desde el reposo cuando $\phi = \pi/4$.

(a) Determine el momento angular total $\vec{L}_{\mathcal{O}}$ y el torque total $\vec{\tau}_{\mathcal{O}}$ del sistema con respecto a $\mathcal{O}$.

(b) Encuentre la ecuación de movimiento satisfecha por ϕ. Determine el valor de $\dot{\phi}$ cuando $\phi = 0$.

(c) Determine la aceleración del centro de masas del sistema con respecto a $\mathcal{O}$. Use este resultado para encontrar la fuerza que ejerce $\mathcal{O}$ sobre la varilla cuando $\phi = 0$.

(a) Calculamos $\vec{L}_0$ y $\vec{\tau}_0$ por definición



$$\vec{L}_0 = \sum \vec{L}_{0,i} = \sum m\, \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

$$\vec{\tau}_0 = \sum \vec{\tau}_{0,i} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Definiendo $\hat{\rho}$ apuntando hacia la masa m_2, la posición y velocidad de cada masa es

$$\vec{r}_1 = -D\hat{\rho} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = -D\dot{\phi}\hat{\phi}$$

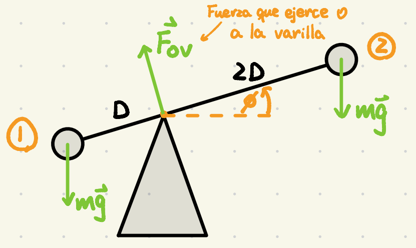
$$\vec{r}_2 = 2D\hat{\rho} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = 2D\dot{\phi}\hat{\phi}$$

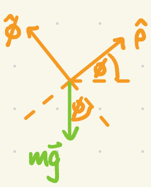
reemplazando en momento angular

$$\left.\begin{aligned} \vec{L}_{01} &= m(-D\hat{\rho} \times -D\dot{\phi}\hat{\phi}) = mD^2\dot{\phi}\,\hat{k} \\ \vec{L}_{02} &= m(2D\hat{\rho} \times 2D\dot{\phi}\hat{\phi}) = m4D^2\dot{\phi}\,\hat{k} \end{aligned}\right\} \quad \vec{L}_0 = \vec{L}_{01} + \vec{L}_{02} = mD^2\dot{\phi}\,\hat{k} + m4D^2\dot{\phi}\,\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{L}_0 = 5mD^2\dot{\phi}\,\hat{k}}$$

Para torque, primero identificamos las fuerzas con DCL





para ambas masas

$$m\vec{g} = mg(-\sin\phi\,\hat{\rho} - \cos\phi\,\hat{\phi})$$

$$= -mg(\sin\phi\,\hat{\rho} + \cos\phi\,\hat{\phi})$$

Luego el torque de cada fuerza

$$\left.\begin{aligned} \vec{\tau}_{mg1} &= -D\hat{\rho} \times -mg(\sin\phi\,\hat{\rho} + \cos\phi\,\hat{\phi}) = Dmg\cos\phi\,\hat{k} \\ \vec{\tau}_{mg2} &= 2D\hat{\rho} \times -mg(\sin\phi\,\hat{\rho} + \cos\phi\,\hat{\phi}) = -2Dmg\cos\phi\,\hat{k} \\ \vec{\tau}_{Fov} &= 0\hat{\rho} \times \vec{F}_{ov} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \vec{\tau}_0 = \vec{\tau}_{mg1} + \vec{\tau}_{mg2} + \vec{\tau}_{Fov}$$

$$\boxed{\vec{\tau}_0 = -Dmg\cos\phi\,\hat{k}}$$

(b) Las ecuaciones de mov. se obtienen a partir de $\frac{d}{dt}\vec{L}_0 = \vec{\tau}_0$, donde

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_0 = \frac{d}{dt}\left(5mD^2\dot{\phi}\,\hat{k}\right) = 5mD^2\ddot{\phi}\,\hat{k}$$

igualando $\frac{d}{dt}\vec{L}_0 = \vec{\tau}_0$

$$5\cancel{m}D^{\cancel{2}}\ddot{\phi}\,\cancel{\hat{k}} = -\cancel{D}\cancel{m}g\cos\phi\,\cancel{\hat{k}} \iff \boxed{\ddot{\phi} + \frac{g}{5D}\cos\phi = 0} \quad \text{EOM} \qquad (1)$$

Ahora, nos piden $\dot{\phi}(\phi=0)$, por lo que hay que obtener $\dot{\phi}$ a partir del EOM.

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{5D}\cos\phi = 0 \qquad /\cdot\dot{\phi}$$

* También funciona con $\ddot{\phi} = \dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$ e integrar

$$\dot{\phi}\ddot{\phi} + \frac{g}{5D}\cos\phi\,\dot{\phi} = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\phi}^2\right) + \frac{g}{5D}\frac{d}{dt}\left(\sin\phi\right) = 0 \qquad / \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{g}{5D}\sin\phi = A$$

imponiendo c.i. $\phi(0) = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\phi}(0) = 0$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2(0) + \frac{g}{5D}\sin(\phi(0)) = \underline{A = \frac{g}{5D}\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{g}{5D}\sin\phi = \frac{g}{5D}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}^2 = \frac{2g}{5D}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\phi\right) \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = -\sqrt{\frac{2g}{5D}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\phi\right)}$$

negativo porque m_2 va "cayendo"

Finalmente

$$\boxed{\dot{\phi}(0) = -\sqrt{\frac{2g}{5D}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cancel{\sin 0}\right)} = -\sqrt{\frac{g\sqrt{2}}{5D}}}$$

(c) El centro de masas está dada por $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M_{tot}}\sum m_i\vec{r}_i$, en este caso

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{2\cancel{m}}\left(\cancel{m}\cdot(-D\hat{\rho}) + \cancel{m}\cdot 2D\hat{\rho}\right) = \frac{1}{2}D\hat{\rho} \qquad \Rightarrow \dot{\vec{r}}_{cm} = \frac{1}{2}D\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}_{cm} = \frac{1}{2}D\ddot{\phi}\hat{\phi} - \frac{1}{2}D\dot{\phi}^2\hat{\rho}$$

Finalmente, por 2da. Ley de Newton

$$M_{tot}\ddot{\vec{r}}_{cm} = \vec{F}^{ext}_{tot} \qquad (\star)$$

en este caso,

$$\vec{F}^{ext}_{tot} = \vec{F}_{mg_1} + \vec{F}_{mg_2} + \vec{F}_{ov} = -mg(\sin\phi\,\hat{\rho} + \cos\phi\,\hat{\phi}) - mg(\sin\phi\,\hat{\rho} + \cos\phi\,\hat{\phi}) + \overbrace{F_\rho\hat{\rho} + F_\phi\hat{\phi}}^{\vec{F}_{ov}}$$

$$= -2mg(\sin\phi\,\hat{\rho} + \cos\phi\,\hat{\phi}) + F_\rho\hat{\rho} + F_\phi\hat{\phi}$$

$$= (F_\rho - 2mg\sin\phi)\hat{\rho} + (F_\phi - 2mg\cos\phi)\hat{\phi}$$

Reemplazando $\ddot{\vec{r}}_{cm}$ y $\vec{F}_{tot}^{ext}$ en (✯)

$$\cancel{2}m\left(\tfrac{1}{\cancel{2}}D\ddot{\phi}\hat{\phi}-\tfrac{1}{\cancel{2}}D\dot{\phi}^2\hat{\rho}\right)=(F_\rho-2mg\sin\phi)\hat{\rho}+(F_\phi-2mg\cos\phi)\hat{\phi}$$

por componentes

$$\hat{\rho}\,\rfloor\quad -mD\dot{\phi}^2=F_\rho-2mg\sin\phi$$

$$\hat{\phi}\,\rfloor\quad mD\ddot{\phi}=F_\phi-2mg\cos\phi$$

reemplazando $\ddot{\phi}$ y $\dot{\phi}$ calculados en (1) y (2)

$$\Rightarrow\begin{cases}-mD\frac{2g}{5D}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\phi\right)=F_\rho-2mg\sin\phi\\[2ex]-mD\frac{g}{5D}\cos\phi=F_\phi-2mg\cos\phi\end{cases}\iff\begin{cases}F_\rho=2mg\sin\phi-mD\frac{2g}{5D}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\phi\right)\\[2ex]F_\phi=2mg\cos\phi-mD\frac{g}{5D}\cos\phi\end{cases}$$

cuando $\phi=0$, $\sin\phi=0$ y $\cos\phi=1$

$$F_\rho=2mg\,\cancel{\sin\phi}^{\,0}-mD\frac{2g}{5D}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\cancel{\sin\phi}^{\,0}\right)=-m\cancel{D}\frac{g\sqrt{2}}{5\cancel{D}}=-\frac{\sqrt{2}}{5}mg$$

$$F_\phi=2mg\,\cancel{\cos\phi}^{\,1}-mD\frac{g}{5D}\cancel{\cos\phi}^{\,1}=2mg-\frac{1}{5}mg=\frac{9}{5}mg$$

$$\Rightarrow\vec{F}_{ov}(\phi=0)=F_\rho(0)\hat{\rho}+F_\phi(0)\hat{\phi}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{5}mg\,\hat{\rho}+\frac{9}{5}mg\,\hat{\phi}$$

$$\boxed{\vec{F}_{ov}(\phi=0)=\frac{1}{5}mg\left(9\hat{\phi}-\sqrt{2}\,\hat{\rho}\right)}$$