Auxiliar 20

Torque y momentum angular II

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

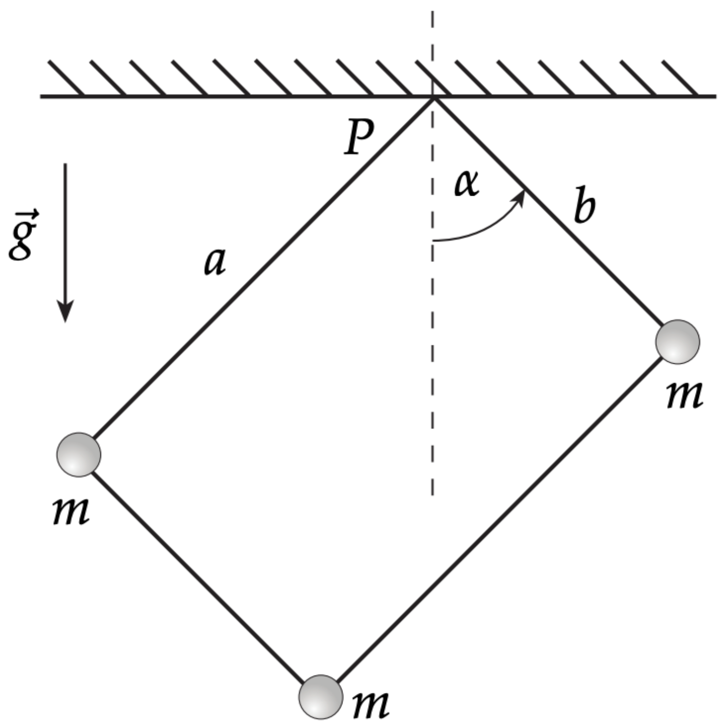
P1.-

Tres partículas de masa m están en los vértices de un rectángulo de $a \times b$, formado por varas ideales de masa despreciable. El cuarto vértice está fijo a un punto P (ver Figura). El rectángulo puede girar en torno a un eje que pasa por P y es perpendicular a la figura. Considere que $a = \sqrt{3}b$.

a) Usando torque y momentum angular calcule la ecuación de movimiento para el ángulo con respecto a la vertical ϕ (en la figura es α)

b) Usando a) calcule el punto de equilibrio del sistema

c) Usando aproximación en serie de Taylor encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio



P2.- Control 2 2023

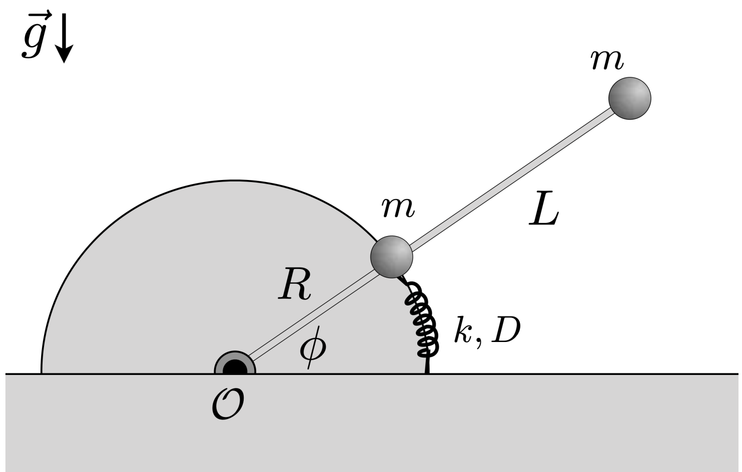
Considere dos masas m sostenidas por una varilla rígida (sin masa) de largo L que puede girar en torno a un eje (punto $\mathcal{O}$) ubicado sobre el suelo (ver figura). Las masas están a distancias R y L del origen $\mathcal{O}$, respectivamente. La primera masa permanece conectada al suelo mediante un resorte de constante elástica k y largo natural $D < R\pi/2$, confinado al borde de un disco de radio R cuyo centro coincide con el eje de giro de la varilla.

a) Calcule el momentum angular total del sistema con respecto al eje de rotación

b) Calcule el torque total del sistema con respecto al eje de rotación

c) Obtenga la ecuación de movimiento para el ángulo ϕ

d) Determine la fuerza que el eje $\mathcal{O}$ ejerce sobre la varilla en el instante inicial en que $\phi = \pi/2$ y $\dot{\phi} = 0$



Formulario

Torque y momentum angular

Para un sistema con n partículas, tenemos la relación

$$\vec{\tau}_{\text{tot}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t}\,,$$

donde

$$\vec{\tau}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i\,; \qquad \vec{L}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i\,.$$

Las fórmulas de torque y momentum angular son:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}\,; \qquad \vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}\,,$$

donde $\vec{F}$ es la suma de todas las fuerzas ejercidas sobre la partícula de interés, $\vec{r}$ es el vector posición de la partícula, y $\vec{v}$ la velocidad de la misma.

Sistema de partículas

Para un sistema de n-partículas se puede escribir un equivalente de la segunda Ley de Newton para el caso de una sola partícula:

$$M_{\text{tot}}\ddot{\vec{R}}_{\text{CM}} = \sum_j \vec{F}_j^{\text{ext}},$$

donde

$$M_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

es la masa total,

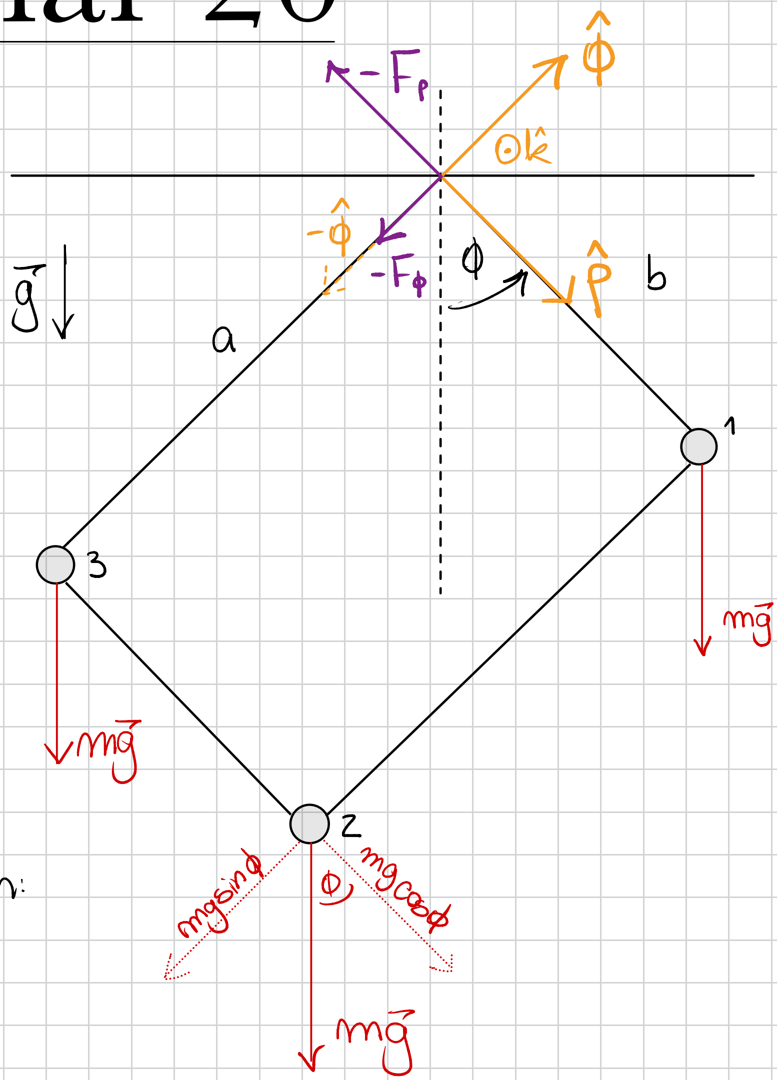
$$\vec{R}_{\text{CM}} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

es la posición del centro de masas, y $\vec{F}_j^{\text{ext}}$ es la j-ésima fuerza externa actuando sobre el sistema.

Esta ecuación de movimiento es muy útil si es que *nos faltan ecuaciones*, o para calcular fuerzas de pivotes (que típicamente no aparecen cuando ocupamos la relación torque-momentum angular.)

Auxiliar 20

P1



a) Queremos ocupar la relación

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \vec{\tau}^{\,ext}_{tot}, \quad (1)$$

primero definamos las posiciones de las partículas. Utilizando el sistema dibujado, $\{\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k}\}$, tenemos

- $\vec{r}_1 = b\hat{\rho}$
- $\vec{r}_2 = b\hat{\rho} - a\hat{\phi}$
- $\vec{r}_3 = -a\hat{\phi}$

por lo que sus velocidades (derivando) son:

- $\vec{v}_1 = b\dot{\phi}\hat{\phi}$
- $\vec{v}_2 = b\dot{\phi}\hat{\phi} + a\dot{\phi}\hat{\rho}$
- $\vec{v}_3 = a\dot{\phi}\hat{\rho}$

Ahora, calculemos el momentum angular de cada partícula, $\vec{L}_i$, ocupando

$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i, \quad m_i = m \ \forall i$$

- $\vec{L}_1 = m b\hat{\rho} \times (b\dot{\phi}\hat{\phi}) = mb^2\dot{\phi}\hat{k}$
- $\vec{L}_2 = m(b\hat{\rho} - a\hat{\phi}) \times (b\dot{\phi}\hat{\phi} + a\dot{\phi}\hat{\rho}) = mb^2\dot{\phi}\hat{k} + ma^2\dot{\phi}\hat{k}$
- $\vec{L}_3 = -m a\hat{\phi} \times (a\dot{\phi}\hat{\rho}) = ma^2\dot{\phi}\hat{k}$

por lo que el momt. ang. total sería

$$\vec{L}_{tot} = 2m(a^2+b^2)\dot{\phi}\hat{k} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = 2m(a^2+b^2)\ddot{\phi}\hat{k}}$$

Nos faltaría calcular los torques $\vec{\tau}_i^{\,ext}$ sobre cada partícula.

Para ocupar (1) solo consideramos fuerzas externas, que en este caso sería la fuerza peso, que para las tres partículas se descompone como

$$m\vec{g} = mg\cos\phi\,\hat{\rho} - mg\sin\phi\,\hat{\phi}.$$

Ocupando

$$\vec{\tau}_i^{ext} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{tot,ext}$$

obtenemos

- $\vec{\tau}_1^{ext} = b\hat{\rho} \times (mg\cos\phi\,\hat{\rho} - mg\sin\phi\,\hat{\phi}) = -mgb\sin\phi\,\hat{k}$
- $\vec{\tau}_2^{ext} = (b\hat{\rho} - a\hat{\phi}) \times (mg\cos\phi\,\hat{\rho} - mg\sin\phi\,\hat{\phi}) = -mgb\sin\phi\,\hat{k} + mga\cos\phi\,\hat{k}$
- $\vec{\tau}_3^{ext} = -a\hat{\phi} \times (mg\cos\phi\,\hat{\rho} - mg\sin\phi\,\hat{\phi}) = mga\cos\phi\,\hat{k}$

así que el torque externo total sería

$$\vec{\tau}_{tot}^{ext} = \sum_{i=1}^{3} \vec{\tau}_i^{ext} = \boxed{2mg(a\cos\phi - b\sin\phi)\,\hat{k}}$$

Reemplazando en (1)

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \vec{\tau}_{tot}^{ext} \iff 2m(a^2+b^2)\ddot{\phi} = 2mg(a\cos\phi - b\sin\phi)$$

$$\iff \boxed{\ddot{\phi} + \frac{g}{a^2+b^2}(b\sin\phi - a\cos\phi) = 0} \quad (2)$$

b) Los puntos de equilibrio se dan donde la aceleración es 0, así que de (2) imponemos $\ddot{\phi} \overset{!}{=} 0$ en ϕ_0.

$$b\sin\phi_0 - a\cos\phi_0 \overset{!}{=} 0$$

$$\iff \phi_0 = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

donde usamos $a = \sqrt{3}b$. Ahora consideraremos pequeñas oscilaciones como

$$\phi(t) = \phi_0 + \delta\phi(t), \quad \text{con } |\delta\phi(t)| \ll 1 \quad \forall t$$

c) Expandamos en Taylor el segundo término de (2)

- $\cos(\phi = \phi_0 + \delta\phi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k\cos\phi}{d\phi^k}\bigg|_{\phi=\phi_0} (\delta\phi)^k = \cos(\phi_0) - \sin(\phi_0)\,\delta\phi + \cancel{\mathcal{O}(\delta\phi^2)}^{\sim 0}$

$$\approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\delta\phi$$

- $\sin(\phi = \phi_0 + \delta\phi) = \sin(\phi_0) + \cos(\phi_0)\,\delta\phi + \cancel{O(\delta\phi^2)}^{\sim 0}$

$$\approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\delta\phi$$

Reemplazando en (2), con $\ddot{\phi} = \ddot{\delta\phi}$, obtenemos

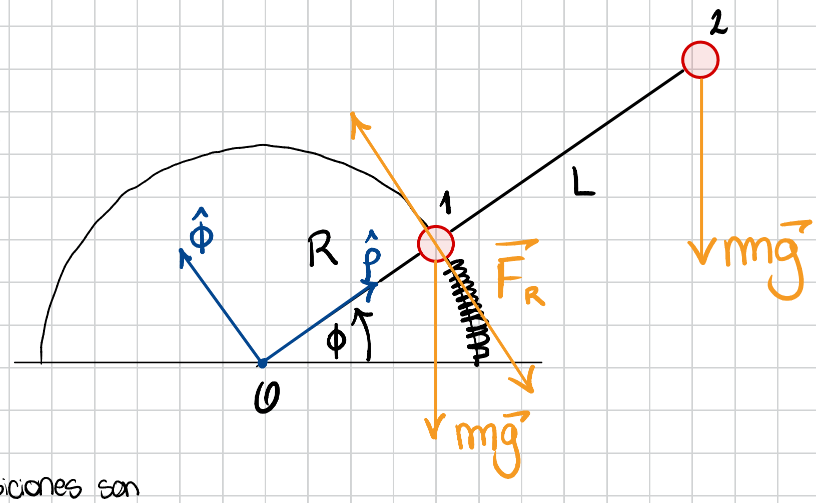
$$\ddot{\delta\phi} + \frac{g}{4b^2}\left[b\left(\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{2}\delta\phi\right) - \sqrt{3}b\left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\delta\phi\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\delta\phi} + \frac{g}{2b}\delta\phi = 0$$

que es la ec. de un M.A.S., donde identificamos la frecuencia de oscilación

$$\boxed{\omega^2 = \frac{g}{2b}}$$

P2



a) Nos piden el momentum angular total, dado por

$$\vec{L}_{tot} = \sum_i \vec{L}_i$$

con $\vec{L}_i$ el momentum angular de cada partícula,

$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Utilizando el sist. cilíndrico de la figura, las posiciones son

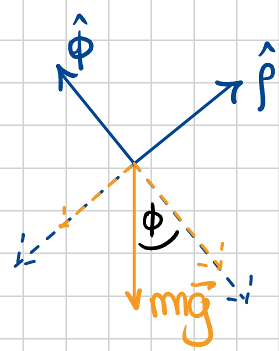
$$\triangleright\ \vec{r}_1 = R\hat{\rho}\,, \qquad \triangleright\ \vec{r}_2 = L\hat{\rho}$$

así que sus velocidades son:

$$\triangleright\ \vec{v}_1 = R\dot{\phi}\hat{\phi}\,, \qquad \triangleright\ \vec{v}_2 = L\dot{\phi}\hat{\phi}$$

y el momentum angular

$$\vec{L}_{tot} = \sum_{i=1}^{2} \vec{L}_i = m(R\hat{\rho})\times(R\dot{\phi}\hat{\phi}) + m(L\hat{\rho})\times(L\dot{\phi}\hat{\phi}) = \boxed{m(R^2+L^2)\dot{\phi}\hat{k}}$$



b) Para el torque solo ocupamos fuerzas externas a nuestro sistema de 2 partículas unidas por una vara. En este caso tenemos peso para ambas,

$$m\vec{g} = -mg\sin\phi\,\hat{\rho} - mg\cos\phi\,\hat{\phi}\,,$$

y además tenemos el resorte actuando en la posición de la partícula 1

$$\vec{F}_R = -k(r-D)\hat{\phi}$$

donde $r = R\phi$. Importante que checkeen que el signo está correcto. Entonces el torque total se da por

$$\vec{\tau}_{tot} = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j^{ext}$$ ya que $\vec{r}_j$ no es necesariamente la posición de una partícula

$$= (R\hat{\rho})\times(-mg\sin\phi\,\hat{\rho} - mg\cos\phi\,\hat{\phi}) + (L\hat{\rho})\times(-mg\sin\phi\,\hat{\rho} - mg\cos\phi\,\hat{\phi}) + (R\hat{\rho})\times(-k(R\phi - D)\hat{\phi})$$

$$= \boxed{-mg(R+L)\cos\phi\,\hat{k} - kR(R\phi - D)\hat{k}}$$

c) La EoM del sistema está dada por $\vec{\tau}_{tot} = d\vec{L}_{tot}/dt$, que sería

$$m(R^2+L^2)\ddot{\phi}\hat{k} = -mg(R+L)\cos\phi\,\hat{k} - kR(R\phi - D)\hat{k}$$

o escrito escalarmente: $$\boxed{m(R^2+L^2)\ddot{\phi} = -mg(R+L)\cos\phi - kR(R\phi - D)} \quad (1)$$

d) La fuerza que ejerce O sobre nuestro sistema no apareció antes por que su brazo de palanca es nulo, por lo que su contribución al torque también es nulo. Entonces, tenemos que hacerlo aparecer. Para esto invocamos segunda Ley de Newton para un sist. de partículas:

$$M_{tot}\ddot{\vec{R}}_{CM} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$$

donde al RHS debería aparecer la fuerza del pivote $\vec{F}_O$.

La masa total sería simplemente $M_{tot} = \sum_{i=1}^{2} m_i = 2m$, mientras que la posición del CM

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M_{tot}}\sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{1}{2m}\left(mR\hat{\rho} + mL\hat{\rho}\right) = \frac{1}{2}(R+L)\hat{\rho}$$

entonces su aceleración es

$$\dot{\vec{R}}_{CM} = \frac{1}{2}(R+L)\dot{\phi}\hat{\phi} \Rightarrow \ddot{\vec{R}}_{CM} = -\frac{1}{2}(R+L)\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \frac{1}{2}(R+L)\ddot{\phi}\hat{\phi}$$

Las fuerzas externas serían las ya mencionadas, pero incluyendo $\vec{F}_O = F_{O\rho}\hat{\rho} + F_{O\phi}\hat{\phi}$

$$\Rightarrow \sum_i \vec{F}_i^{ext} = -2mg\sin\phi\,\hat{\rho} - 2mg\cos\phi\,\hat{\phi} - k(R\phi - D)\hat{\phi} + F_{O\rho}\hat{\rho} + F_{O\phi}\hat{\phi}$$

Juntando todo

$$-m(R+L)\dot{\phi}^2\hat{\rho} + m(R+L)\ddot{\phi}\hat{\phi} = -2mg\sin\phi\,\hat{\rho} - 2mg\cos\phi\,\hat{\phi} - k(R\phi - D)\hat{\phi} + F_{O\rho}\hat{\rho} + F_{O\phi}\hat{\phi}$$

que traducido a ec. escalares

$$\hat{\rho})\ -m(R+L)\dot{\phi}^2 = -2mg\sin\phi + F_{O\rho}$$

$$\hat{\phi})\ m(R+L)\ddot{\phi} = -2mg\cos\phi - k(R\phi - D) + F_{O\phi}$$

De aquí podemos obtener expresiones de $F_{O\rho}$ y $F_{O\phi}$ en función de $\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}$, así que usando (1)

$$F_{O\rho}(\phi,\dot{\phi}) = -m(R+L)\dot{\phi}^2 + 2mg\sin\phi$$

$$F_{O\phi}(\phi) = -\frac{R+L}{R^2+L^2}\left[-mg(R+L)\cos\phi - kR(R\phi - D)\right] + 2mg\cos\phi + k(R\phi - D)$$

que evaluando con $\phi = \pi/2$ y $\dot{\phi} = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} F_{O\rho}(\pi/2, 0) &= 2mg \\ F_{O\phi}(\pi/2) &= -\frac{(R+L)kR}{R^2+L^2}(R\pi/2 - D) + k(R\pi/2 - D) \end{aligned}}$$