# Auxiliar 20

## Torque y momentum angular II

**Profesor: Gonzalo Palma**
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

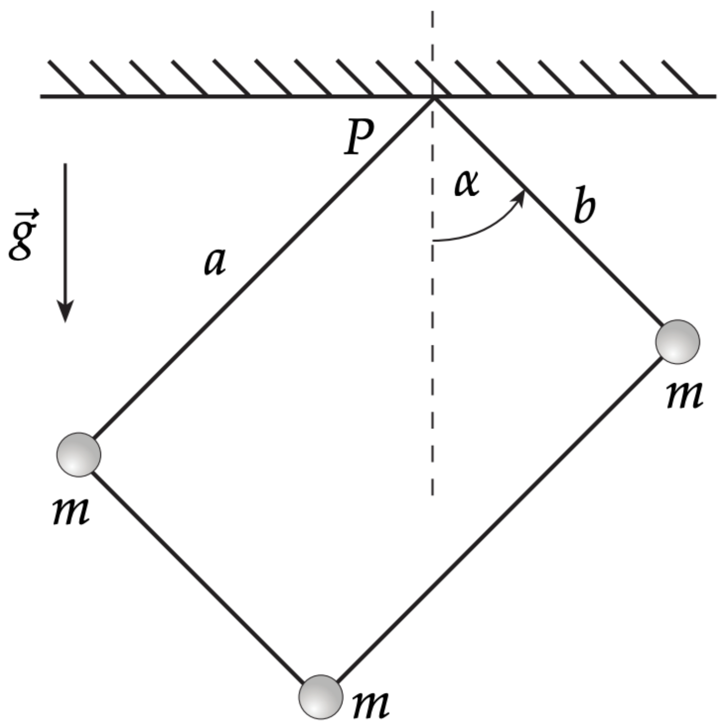
**P1.-**

Tres partículas de masa $m$ están en los vértices de un rectángulo de $a \times b$, formado por varas ideales de masa despreciable. El cuarto vértice está fijo a un punto $P$ (ver Figura). El rectángulo puede girar en torno a un eje que pasa por $P$ y es perpendicular a la figura. Considere que $a = \sqrt{3}b$.

a) Usando torque y momentum angular calcule la ecuación de movimiento para el ángulo con respecto a la vertical $\phi$ (en la figura es $\alpha$)

b) Usando a) calcule el punto de equilibrio del sistema

c) Usando aproximación en serie de Taylor encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio



## P2.- Control 2 2023

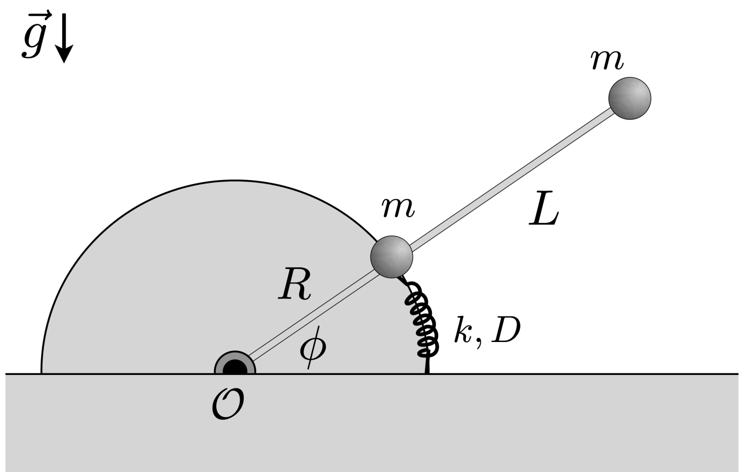
Considere dos masas $m$ sostenidas por una varilla rígida (sin masa) de largo $L$ que puede girar en torno a un eje (punto $\mathcal{O}$) ubicado sobre el suelo (ver figura). Las masas están a distancias $R$ y $L$ del origen $\mathcal{O}$, respectivamente. La primera masa permanece conectada al suelo mediante un resorte de constante elástica $k$ y largo natural $D < R\pi/2$, confinado al borde de un disco de radio $R$ cuyo centro coincide con el eje de giro de la varilla.

a) Calcule el momentum angular total del sistema con respecto al eje de rotación

b) Calcule el torque total del sistema con respecto al eje de rotación

c) Obtenga la ecuación de movimiento para el ángulo $\phi$

d) Determine la fuerza que el eje $\mathcal{O}$ ejerce sobre la varilla en el instante inicial en que $\phi = \pi/2$ y $\dot{\phi} = 0$



# Formulario

## Torque y momentum angular

Para un sistema con $n$ partículas, tenemos la relación

$$\vec{\tau}_{\text{tot}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t}\,,$$

donde

$$\vec{\tau}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i\,; \qquad \vec{L}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i\,.$$

Las fórmulas de torque y momentum angular son:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}\,; \qquad \vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}\,,$$

donde $\vec{F}$ es la suma de todas las fuerzas ejercidas sobre la partícula de interés, $\vec{r}$ es el vector posición de la partícula, y $\vec{v}$ la velocidad de la misma.

## Sistema de partículas

Para un sistema de $n$-partículas se puede escribir un equivalente de la segunda Ley de Newton para el caso de una sola partícula:

$$M_{\text{tot}}\ddot{\vec{R}}_{\text{CM}} = \sum_j \vec{F}_j^{\text{ext}},$$

donde

$$M_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

es la masa total,

$$\vec{R}_{\text{CM}} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

es la posición del centro de masas, y $\vec{F}_j^{\text{ext}}$ es la $j$-ésima fuerza externa actuando sobre el sistema.

Esta ecuación de movimiento es muy útil si es que *nos faltan ecuaciones*, o para calcular fuerzas de pivotes (que típicamente no aparecen cuando ocupamos la relación torque-momentum angular.)