Auxiliar 19

SRNI III, Momento angular y Torque

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

P1.-

El brazo horizontal $\mathcal{OA}$ de la figura, de longitud L, gira en torno al origen $\mathcal{O}$ con velocidad angular $\vec{\omega} = \omega_0\hat{z}$ constante, donde $\hat{z}$ es un vector unitario que apunta verticalmente hacia arriba. El extremo A del brazo sostiene una plataforma horizontal con forma de disco, de radio R y a una altura h, la cual gira en torno al eje $A\mathcal{O}'$ con velocidad angular $\vec{\Omega} = \Omega_0\hat{z}'$ constante con respecto al sistema inercial fijo S. Considere como sistema no-inercial S' a aquel solidario a la plataforma, con origen en $\mathcal{O}'$ y vectores unitarios $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ (ver figura). Inicialmente, en $t = 0$, tanto el brazo como $\hat{x}'$ apuntan en la dirección $\hat{x}$ del sistema S. En $t = 0$, una persona parada sobre la plataforma, libera en $\mathcal{O}'$ una masa m desde el reposo sobre la plataforma (es decir: $\vec{r}' = 0$ y $\vec{v}' = 0$). Hay gravedad, pero no hay roce entre la masa m y la plataforma.

(a) Escriba expresiones para las fuerzas no inerciales asociadas al sistema S'. Exprésetelas en términos de las coordenadas (x', y') y vectores unitarios $\hat{x}'$ e $\hat{y}'$ solidarios a la plataforma.

(b) Escriba las dos ecuaciones escalares que describen el movimiento de la partícula para x' e y'.

(c) Considere el caso particular $\Omega_0 = \omega_0$. Encuentre la solución $x'(t), y'(t)$ para $t > 0$ antes de que la masa deslice fuera de la plataforma.

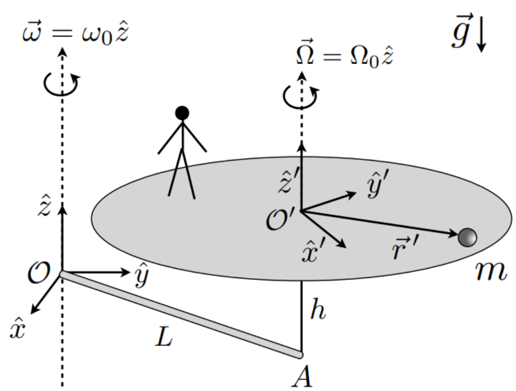

Figura 1: Pregunta 1

P2.-

Una varilla rígida, sin masa, de largo $3D$, tiene dos masas idénticas puntuales en sus extremos, y puede girar en torno a una rótula montada sobre un soporte (punto $\mathcal{O}$ de la figura). La ubicación de la rótula es tal que una de las masas se mantiene a una distancia D, mientras que la otra lo está a una distancia $2D$ de ella. El ángulo entre la parte más larga de la varilla y la horizontal es ϕ. La varilla se suelta desde el reposo cuando $\phi = \pi/4$.

(a) Determine el momento angular total $\vec{L}_{\mathcal{O}}$ y el torque total $\vec{\tau}_{\mathcal{O}}$ del sistema con respecto a $\mathcal{O}$.

(b) Encuentre la ecuación de movimiento satisfecha por ϕ. Determine el valor de $\dot{\phi}$ cuando $\phi = 0$.

(c) Determine la aceleración del centro de masas del sistema con respecto a $\mathcal{O}$. Use este resultado para encontrar la fuerza que ejerce $\mathcal{O}$ sobre la varilla cuando $\phi = 0$.

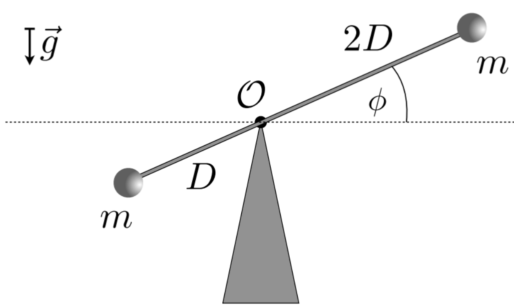

Figura 2: Pregunta 2

Formulario

Sistema de referencia no inercial

La ecuación de movimiento para el SRNI S' es

$$m\ddot{\vec{r}}' = \underbrace{\vec{F}}_{\text{reales}} \quad \underbrace{-m\ddot{\vec{R}}}_{\text{traslacional}} \quad \underbrace{-m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')}_{\text{centrífuga}} \quad \underbrace{-2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}'}_{\text{Coriolis}} \quad \underbrace{-m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'}_{\text{Euler}}$$

donde

- $\vec{F}$ es la suma de las fuerzas **reales** aplicadas sobre la partícula.
- $\vec{R}$ vector que va desde el origen de S al origen de S'.
- $\vec{\Omega}$ velocidad angular con la que giran los ejes *cartesianos* de S' c/r a los de S.
- $\vec{r}'$ vector que va desde el origen de S' hasta la partícula.

Momento angular y Torque

El **momento angular** de una partícula de masa m, con respecto a un punto P fijo, se define como

$$\vec{L}_P = m(\vec{r} - \vec{r}_P) \times \vec{v}$$

El **torque** debido a una fuerza $\vec{F}_a$, con respecto al punto P fijo es

$$\vec{\tau}_{P,a} = (\vec{r} - \vec{r}_P) \times \vec{F}_a$$

Así, el torque total con respecto a un punto P es la suma de todos los torques individuales:

$$\vec{\tau}_P = \sum_a \vec{\tau}_{P,a}$$

usando la segunda ley de Neton, se llega a la relación

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_P = \vec{\tau}_P$$