Auxiliar 17

SRNI I

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

P1.-

Considere una caja de base rectangular (lados $2l_0$ y $4l_0$) que rota con velocidad angular constante Ω_0 respecto de un eje vertical (la base de la caja está en posición horizontal) que pasa por su vértice A, como muestra la figura. Por el interior de la caja una partícula de masa m se mueve con roce despreciable, atada a un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0, cuyo otro extremo está fijo al vértice B.

(a) Determine la velocidad angular de la caja Ω_0 tal que la partícula tenga un punto de equilibrio estable en el punto D, ubicado en el punto medio entre los vértices B y C. En este caso, determine la frecuencia de las pequeñas oscilaciones en torno a D.

(b) Si la partícula es liberada desde el reposo (relativo a la caja) en el vértice C, determine a qué distancia de B ella se separa de la pared BC (considere para Ω_0 el valor determinado en (a)).

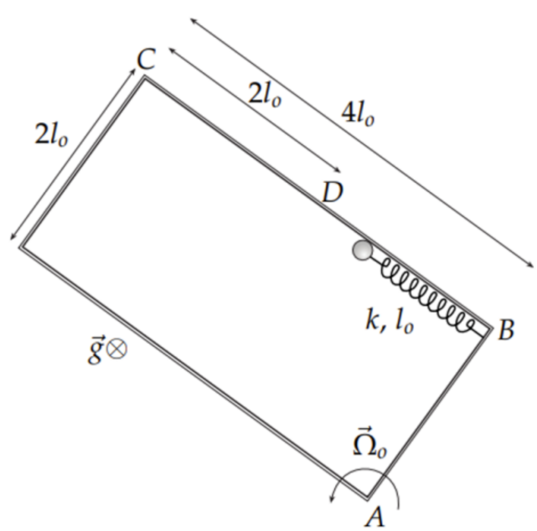


Figura 1: Pregunta 1

P2.-

Un canal circunferencial de radio a contenido en un plano vertical gira en torno a un eje fijo con velocidad angular ω. La rotación es tal que el centro de la circunferencia describe, en su giro, una circunferencia de radio R, y además el plano de rotación es paralelo al eje de rotación. Una partícula de masa m puede deslizar sin roce dentro del canal circunferencial de radio a, tal como se muestra en la siguiente figura:

(a) Obtenga la ecuación de movimiento para el ángulo θ que la partícula describe dentro del canal circunferencial.

(b) Encuentre los puntos de equilibrio relativo de la partícula.

(c) Discuta la estabilidad de estos puntos de equilibrio, y encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a los puntos de equilibrio estable.

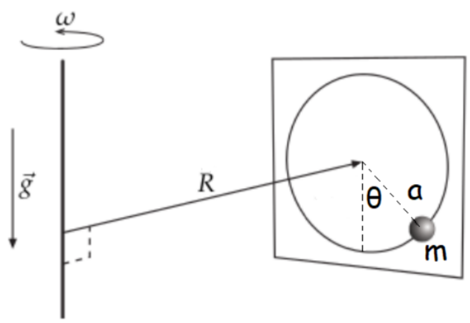


Figura 2: Pregunta 2

Formulario

Sistema de referencia no inercial

La ecuación de movimiento para el SRNI S' es

$$m\ddot{\vec{r}}' = \underbrace{\vec{F}}_{\text{reales}} - \underbrace{m\ddot{\vec{R}}}_{\text{traslacional}} - \underbrace{m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')}_{\text{centrífuga}} - \underbrace{2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}'}_{\text{Coriolis}} - \underbrace{m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'}_{\text{Euler}}$$

donde

- $\vec{F}$ es la suma de las fuerzas **reales** aplicadas sobre la partícula.
- $\vec{R}$ vector que va desde el origen de S al origen de S'.
- $\vec{\Omega}$ velocidad angular con la que giran los ejes *cartesianos* de S' c/r a los de S.
- $\vec{r}'$ vector que va desde el origen de S' hasta la partícula.

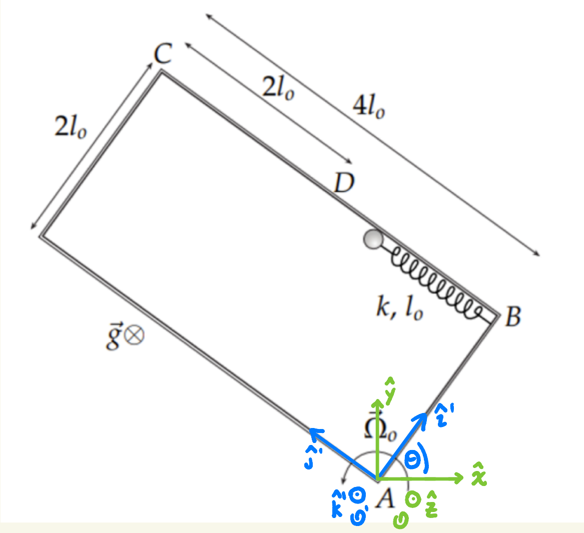
Aux 17 : SRNI

P1

Considere una caja de base rectangular (lados $2l_0$ y $4l_0$) que rota con velocidad angular constante Ω_0 respecto de un eje vertical (la base de la caja está en posición horizontal) que pasa por su vértice A, como muestra la figura. Por el interior de la caja una partícula de masa m se mueve con roce despreciable, atada a un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0, cuyo otro extremo está fijo al vértice B.

(a) Determine la velocidad angular de la caja Ω_0 tal que la partícula tenga un punto de equilibrio estable en el punto D, ubicado en el punto medio entre los vértices B y C. En este caso, determine la frecuencia de las pequeñas oscilaciones en torno a D.

(b) Si la partícula es liberada desde el reposo (relativo a la caja) en el vértice C, determine a qué distancia de B ella se separa de la pared BC (considere para Ω_0 el valor determinado en (a)).



Queremos aplicar la fórmula

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') - 2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'$$

para ello, primero, definimos el origen O' del nuevo sistema de referencia S'.

Naturalmente, el origen O lo podemos definir en A, mientras que O' lo proponemos en el mismo A, sólo que gira c/r a S.

$$S \rightarrow \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$$
$$S' \rightarrow \{\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}'\}$$

Ahora, calculamos todos los términos de la ecuación

$$m\underset{①}{\ddot{\vec{r}}'} = \underset{②}{\vec{F}} - m\underset{③}{\ddot{\vec{R}}} - m\underset{④}{\vec{\Omega}}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') - 2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'$$

① Así, la posición $\vec{r}'$ de la partícula c/r a O' es

$$\vec{r}' = x\hat{\imath}' + y\hat{\jmath}' \quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{\imath}' + \dot{y}\hat{\jmath}' \quad\Rightarrow\quad \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{\imath}' + \ddot{y}\hat{\jmath}'$$

② Las fuerzas reales $\vec{F}$: peso, normales y elástica.

$$\vec{F}_{TOT} = -mg\hat{k}' + \underbrace{N_x}_{\text{c/r a la pared } \overline{BC}}\hat{\imath}' + \overbrace{N_{z'}}^{\text{c/r a la base}}\hat{k}' - k(y-l_0)\hat{\jmath}'$$

→ notar que asumió que la partícula no se despega de la caja.

③ La posición $\vec{R}$ de O' c/r a O, en este caso es O.

$$\Rightarrow \dot{\vec{R}} = \ddot{\vec{R}} = 0$$

④ La velocidad angular $\vec{\Omega}$ que gira S' c/r a S, por enunciado

$$\vec{\Omega} = \Omega_0\hat{k}' \quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{\Omega}} = 0$$

Así, reemplazándolos en la ecuación

$$m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{x}\,\hat{\imath}' + m\ddot{y}\,\hat{\jmath}'$$

(F. real) $\vec{F} = -mg\,\hat{k}' + N_{x'}\hat{\imath}' + N_{z'}\hat{k}' - k(y-l_0)\,\hat{\jmath}'$

(F. traslación) $m\cancel{\ddot{\vec{R}}} = 0$

(F. centrífuga) $m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = m\Omega_0\hat{k}'\times\left[\Omega_0\hat{k}'\times(x\,\hat{\imath}' + y\,\hat{\jmath}')\right] = m\Omega_0^2\,\hat{k}'\times\left[x\,\hat{\jmath}' - y\,\hat{\imath}'\right] = m\Omega_0^2(-x\,\hat{\imath}' - y\,\hat{\jmath}')$

(F. Coriolis) $2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' = 2m\Omega_0\hat{k}'\times(\dot{x}\,\hat{\imath}' + \dot{y}\,\hat{\jmath}') = 2m\Omega_0(\dot{x}\,\hat{\jmath}' - \dot{y}\,\hat{\imath}')$

(F. Euler) $m\cancel{\dot{\vec{\Omega}}}\times\vec{r}' = 0$

luego

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m\cancel{\ddot{\vec{R}}}^{\,0} - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') - 2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' - m\cancel{\dot{\vec{\Omega}}}^{\,0}\times\vec{r}'$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x}\,\hat{\imath}' + m\ddot{y}\,\hat{\jmath}' = \left[-mg\,\hat{k}' + N_{x'}\hat{\imath}' + N_{z'}\hat{k}' - k(y-l_0)\,\hat{\jmath}'\right] - \left[m\Omega_0^2(-x\,\hat{\imath}' - y\,\hat{\jmath}')\right] - \left[2m\Omega_0(\dot{x}\,\hat{\jmath}' - \dot{y}\,\hat{\imath}')\right]$$

por componentes queda

$\hat{\imath}'\rfloor \quad m\ddot{x} = N_{x'} + m\Omega_0^2 x + 2m\Omega_0\dot{y}$ (1)

$\hat{\jmath}'\rfloor \quad m\ddot{y} = -k(y-l_0) + m\Omega_0^2 y + 2m\Omega_0\dot{x}$ (2)

$\hat{k}'\rfloor \quad 0 = -mg + N_{z'}$ (3)

a) En equilibrio $\dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}} = 0$, además, nos pide que tal punto sea en D, esto es $y_{eq} = 2l_0$

$\hat{\imath}'\rfloor \quad m\cancel{\ddot{x}}^{\,0} = N_{x'} + m\Omega_0^2 x + 2m\Omega_0\cancel{\dot{y}}^{\,0} \qquad\qquad 0 = N_{x'} + m\Omega_0^2 x$ (4)

$\hat{\jmath}'\rfloor \quad m\cancel{\ddot{y}}^{\,0} = -k(\cancel{y}^{\,2l_0} - l_0) + m\Omega_0^2\cancel{y}^{\,2l_0} + 2m\Omega_0\cancel{\dot{x}}^{\,0} \quad\Leftrightarrow\quad 0 = -k\,l_0 + 2l_0 m\Omega_0^2$ (5)

$\hat{k}'\rfloor \quad 0 = -mg + N_{z'} \qquad\qquad 0 = -mg + N_{z'}$ (6)

despejamos Ω_0 de (5)

$k\cancel{l_0} = 2\cancel{l_0}m\Omega_0^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\Omega_0 = +\sqrt{\frac{k}{m}}}$ $\longrightarrow$ positivo para que rote como el dibujo

Para pequeñas oscilaciones en (5), definamos $\delta y = y - 2l_0 \Leftrightarrow \delta\ddot{y} = \ddot{y}$

$$m\delta\ddot{y} = -k(\delta y + 2l_0 - l_0) + \cancel{m}\frac{k}{2\cancel{m}}(\delta y + 2l_0) \Leftrightarrow m\delta\ddot{y} = -k(\delta y + \cancel{l_0}) + \frac{k}{2}(\delta y + \cancel{2l_0})$$

$$\Leftrightarrow \delta\ddot{y} + \frac{k}{2m}\delta y = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{2m}}$$

b) Para ver en qué punto (x,y) se separa de la pared, al ser 2 incógnitas, necesitamos 2 ecuaciones, usemos (1) y (2)

$$m\cancel{\ddot{x}}^{\,0} = N_{x'} + m\Omega_0^2\cancel{x}^{\,2l_0} + 2m\Omega_0\dot{y}$$

$$m\ddot{y} = -k(y-l_0) + m\Omega_0^2 y + 2m\Omega_0\cancel{\dot{x}}^{\,0}$$

mientras la partícula no se despega, $x = 2l_0 \Rightarrow \dot{x} = \ddot{x} = 0$

$$0 = N_{x'} + 2l_0 m\Omega_0^2 + 2m\Omega_0\dot{y} \qquad (7)$$

$$m\ddot{y} = -k(y-l_0) + m\Omega_0^2 y \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{y} = (m\Omega_0^2 - k)y + kl_0 \qquad (8)$$

Queremos imponer $N_{x'} = 0$ y obtener $\dot{y}$, pero desconocemos $\dot{y}$... hay que sacarlo de (8)!

como parte de $y = 4l_0$, integramos de $4l_0$ a y (8)

$$\int_{4l_0}^{y} m\,\dot{y}\frac{d\dot{y}}{\cancel{dy}}\cancel{dy} = \int_{4l_0}^{y}\left[(m\Omega_0^2 - k)y + kl_0\right]dy$$

(recordar que $\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d\dot{y}}{dy}\frac{dy}{dt} = \dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy}$)

$\dot{y}(y) = \dot{y}$
$\dot{y}(4l_0) = 0$

$$m\int_0^{\dot{y}}\dot{y}\,d\dot{y} = \left[\tfrac{1}{2}(m\Omega_0^2 - k)y^2 + kl_0 y\right]\Big|_{4l_0}^{y}$$

$$m\tfrac{1}{2}\dot{y}^2\Big|_0^{\dot{y}} = \underline{\tfrac{1}{2}(m\Omega_0^2 - k)y^2} + kl_0 y - \underline{\tfrac{1}{2}(m\Omega_0 - k)16l_0^2} - 4kl_0^2$$

$$m\dot{y}^2 = (m\Omega_0^2 - k)(y^2 - 16l_0^2) + 2(kl_0 y - 4kl_0^2)$$

$$\dot{y} = -\sqrt{\tfrac{1}{m}\left[(m\Omega_0^2 - k)(y^2 - 16l_0^2) + 2(kl_0 y - 4kl_0^2)\right]}$$

⚠ Es negativo porque va de C a B, esto es $-\hat{y}'$

reemplazamos en (7), imponiendo $N_x = 0$

$$0 = \cancel{N_{x'}}^{\,0} + 2l_0 m\Omega_0^2 - 2m\Omega_0\sqrt{\tfrac{1}{m}\left[(m\Omega_0^2 - k)(y^2 - 16l_0^2) + 2(kl_0 y - 4kl_0^2)\right]}$$

recordando que $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$

$$0 = \cancel{2}l_0\cancel{m}\frac{k}{\cancel{2m}} - 2m\sqrt{\frac{k}{2m}}\sqrt{\tfrac{1}{m}\left[\left(\cancel{m}\frac{k}{2\cancel{m}} - k\right)(y^2 - 16l_0^2) + 2(kl_0 y - 4kl_0^2)\right]}$$

$$0 = l_0 k - \sqrt{2\cancel{m}k}\sqrt{\tfrac{1}{\cancel{m}}\left[-\tfrac{k}{2}(y^2 - \cancel{16l_0^2}) + 2kl_0 y - \cancel{8kl_0^2}\right]}$$

$$\frac{l_0 k}{\sqrt{2k}} = \sqrt{-\tfrac{k}{2}y^2 + 2kl_0 y} \qquad /\,(\ )^2$$

$$\frac{\cancel{k}}{2}l_0^2 = -\frac{\cancel{k}}{2}y^2 + 2\cancel{k}l_0 y$$

$$0 = y^2 - 4l_0 y + l_0^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{4l_0 \pm \sqrt{16l_0^2 - 4l_0^2}}{2} = \frac{4l_0 \pm 2\sqrt{3}\,l_0}{2} = l_0(2 \pm \sqrt{3})$$

Finalmente, como la partícula va de C a B, pasa primero por el y mayor.

$$y_{despegue} = l_0(2 + \sqrt{3})$$

$\boxed{P_2}$

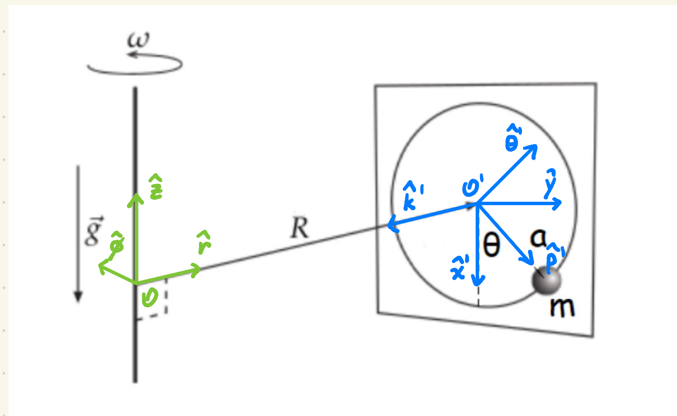
Un canal circunferencial de radio a contenido en un plano vertical gira en torno a un eje fijo con velocidad angular ω. La rotación es tal que el centro de la circunferencia describe, en su giro, una circunferencia de radio R, y además el plano de rotación es paralelo al eje de rotación. Una partícula de masa m puede deslizar sin roce dentro del canal circunferencial de radio a, tal como se muestra en la siguiente figura:

(a) Obtenga la ecuación de movimiento para el ángulo θ que la partícula describe dentro del canal circunferencial.

(b) Encuentre los puntos de equilibrio relativo de la partícula.

(c) Discuta la estabilidad de estos puntos de equilibrio, y encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a los puntos de equilibrio estable.

Al igual que $\boxed{P_1}$, partimos definiendo S', que tendrá origen en el centro del canal circunferencial. Mientras que S será en el eje vertical de giro.



Por conveniencia, usemos las sgtes bases:

$$S \longrightarrow \{\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z}\}$$

$$S' \longrightarrow \{\hat{\rho}', \hat{\theta}', \hat{k}'\}$$

Calculando los términos de la ecuación

$$m\underset{\textcircled{1}}{\ddot{\vec{r}}'} = \underset{\textcircled{2}}{\vec{F}} - m\underset{\textcircled{3}}{\ddot{\vec{R}}} - m\underset{\textcircled{4}}{\vec{\Omega}}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') - 2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'$$

① Posición $\vec{r}'$ de la partícula c/r a O'

$$\vec{r}' = a\hat{\rho}' \quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{r}}' = a\dot{\theta}\hat{\theta}' \quad\Rightarrow\quad \ddot{\vec{r}}' = a\ddot{\theta}\hat{\theta}' - a\dot{\theta}^2\hat{\rho}'$$

② Las fuerzas reales $\vec{F}$: peso, normal (que puede estar en $\hat{\rho}'$ y $\hat{k}'$)

$$\vec{F} = mg\,\hat{x}' + N_\rho\,\hat{\rho}' + N_z\,\hat{k}'$$

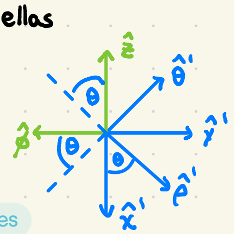
③ La posición $\vec{R}$ de O' c/r a O

$$\vec{R} = R\hat{r} \quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{R}} = R\dot{\phi}\hat{\phi} \quad\xrightarrow{\dot{\phi}=\omega \text{ cte}}\quad \ddot{\vec{R}} = -R\dot{\phi}^2\hat{r} = -R\omega^2\hat{r}$$

④ La velocidad angular $\vec{\Omega}$ que gira S' c/r a S, por enunciado

$$\vec{\Omega} = \omega\hat{z} \quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{\Omega}} = 0$$

Notemos que tenemos cosas en S y otras en S', así que debemos encontrar una relación entre ellas



$$\hat{r} = -\hat{k}'$$

$$\hat{\phi} = -\hat{y}' = -(\sin\theta\,\hat{\rho}' + \cos\theta\,\hat{\theta}')$$

$$\hat{z} = -\hat{x}' = -(\cos\theta\,\hat{\rho}' - \sin\theta\,\hat{\theta}')$$

Reemplazándolos en la ecuación

$$m\ddot{\vec{r}}' = \boxed{m(a\ddot{\theta}\hat{\theta}' - a\dot{\theta}^2\hat{\rho}')}$$

(F. real)

$$\vec{F} = mg\hat{x}' + N_\rho\hat{\rho}' + N_z\hat{k}' = mg(\cos\theta\hat{\rho}' - \sin\theta\,\hat{\theta}') + N_\rho\hat{\rho}' + N_z\hat{k}'$$

$$= \boxed{(mg\cos\theta + N_\rho)\hat{\rho}' - mg\sin\theta\,\hat{\theta}' + N_z\hat{k}}$$

(F. traslación)

$$m\ddot{\vec{R}} = m(-R\omega^2\hat{r}) = \boxed{mR\omega^2\hat{k}'}$$

(F. centrífuga)

$$m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = m\,\omega\hat{z}\times(\omega\hat{z}\times a\hat{\rho}') = m\omega^2 a\left[-(\cos\theta\hat{\rho}' - \sin\theta\,\hat{\theta}')\times\left(-(\cos\theta\hat{\rho}' - \sin\theta\,\hat{\theta}')\times\hat{\rho}'\right]\right.$$

$$= m\omega^2 a\left[-(\cos\theta\hat{\rho}' - \sin\theta\,\hat{\theta}')\times -\sin\theta\,\hat{k}\right]$$

$$= \boxed{m\omega^2 a\left[-\cos\theta\sin\theta\,\hat{\theta}' - \sin^2\theta\,\hat{\rho}'\right]}$$

(F. Coriolis)

$$2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' = 2m\,\omega\hat{z}\times a\dot{\theta}\hat{\theta}' = 2m\omega a\dot{\theta}\left[-(\cos\theta\hat{\rho}' - \sin\theta\,\hat{\theta}')\times\hat{\theta}'\right]$$

$$= \boxed{-2m\omega a\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{k}'}$$

(F. Euler)

$$m\cancel{\dot{\vec{\Omega}}}\times\vec{r}' = 0$$

Reemplazando en la ecuación

$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') - 2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' - m\overset{0}{\cancel{\dot{\vec{\Omega}}}}\times\vec{r}'$$

$$m(a\ddot{\theta}\hat{\theta}' - a\dot{\theta}^2\hat{\rho}') = \left[(mg\cos\theta + N_\rho)\hat{\rho}' - mg\sin\theta\,\hat{\theta}' + N_z\hat{k}\right] - \left[mR\omega^2\hat{k}'\right] + m\omega^2 a\left[\cos\theta\sin\theta\,\hat{\theta}' + \sin^2\theta\,\hat{\rho}'\right]$$
$$+ \left[2m\omega a\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{k}'\right]$$

Por componentes

$\hat{\rho}'\rfloor$ $\quad -ma\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + N_\rho + m\omega^2 a\sin^2\theta \qquad (1)$

$\hat{\theta}'\rfloor$ $\quad ma\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + m\omega^2 a\cos\theta\sin\theta \qquad (2)$

$\hat{k}\rfloor$ $\quad 0 = N_z - mR\omega^2 + 2m\omega a\dot{\theta}\cos\theta \qquad (3)$

a) La ec. de mov para θ se obtiene de (2)

$$\cancel{m}a\ddot{\theta} = -\cancel{m}g\sin\theta + \cancel{m}\omega^2 a\cos\theta\sin\theta \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{a}\sin\theta + \omega^2\sin\theta\cos\theta}$$

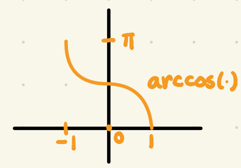
b) El pto de eq. se tiene en $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\frac{g}{a}\sin\theta + \omega^2 \sin\theta\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \sin\theta\left(\omega^2\cos\theta - \frac{g}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{eq} = k\pi \quad k\in\mathbb{Z} \\ \qquad\qquad \text{si } \theta\in[0,2\pi) \Rightarrow \boxed{\theta_1 = 0 \ , \ \theta_2 = \pi} \\ \omega^2\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{3,4} = \pm\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)} \end{cases}$$

* Recordar que $\arccos(\cdot)$ tiene dominio entre $[-1,1]$, así, $\theta_{3,4}$ existe solo si

$$\frac{g}{\omega^2 a} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \omega \geq \sqrt{\frac{g}{a}}$$



es decir, cuando el plano gira muy rápido con respecto al eje vertical.

c) Para ver la estabilidad, podemos obtenerlo derivando $\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\theta}$ → Porque $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = -\nabla U \Leftrightarrow -\nabla\frac{\partial U}{\partial q_i} = m\frac{\partial\ddot{\vec{r}}}{\partial q_i}$

PERO ahora con los SIGNOS OPUESTOS, por el signo (-) de la definición $\vec{F} = -\nabla U$. Es decir,

$$\left.\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\theta}\right|_{\theta_{eq}} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Eq. estable}$$

$$\left.\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\theta}\right|_{\theta_{eq}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Eq. inestable}$$

$$\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{g}{a}\sin\theta + \omega^2\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$= -\frac{g}{a}\cos\theta + \omega^2\cos^2\theta - \omega^2\sin^2\theta$$

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

$$= -\frac{g}{a}\cos\theta + \omega^2\cos(2\theta)$$

Evaluando en los ptos. de equilibrio

$\boxed{\theta_1 = 0}$

$$\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\theta}(0) = -\frac{g}{a}\cancel{\cos 0}^{1} + \omega^2\cancel{\cos(2\cdot 0)}^{1} = \omega^2 - \frac{g}{a}$$

si $\omega > \sqrt{\frac{g}{a}} \Rightarrow \theta_1 = 0$ inestable :(

si $\omega < \sqrt{\frac{g}{a}} \Rightarrow \theta_1 = 0$ estable :)

$\boxed{\theta_2 = \pi}$

$$\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\theta}(\pi) = -\frac{g}{a}\cancel{\cos\pi}^{-1} + \omega^2\cancel{\cos(2\pi)}^{1} = \omega^2 + \frac{g}{a} > 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \pi \text{ inestable :(}$$

$\boxed{\theta_{3,4} = \pm\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)}$

Recordando que $\arccos\theta = \cos^{-1}\theta$ y coseno es función par, así que podemos calcular ambos casos ($\pm$) a la vez y ahorrar trabajo :D.

$$\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\theta}\left(\pm\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)\right) = -\frac{g}{a}\cancel{\cos}\left(\pm\cancel{\arccos}\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)\right) + \omega^2\cos\left(\pm 2\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)\right)$$

NO se puede cancelar con el cos

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
$= \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta)$
$= 2\cos^2\theta - 1$

$$= -\frac{g}{a}\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right) + \omega^2\left[2\cancel{\cos}^2\left(\pm\cancel{\arccos}\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)\right) - 1\right]$$

$$= -\left(\frac{g}{\omega a}\right)^2 + \omega^2\left[2\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)^2 - 1\right]$$

$$= \left(\frac{g}{\omega a}\right)^2 - \omega^2$$

Con esto deducimos el signo

$$= \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{g^2}{a^2} - \omega^2\right) = \frac{1}{\omega^2}\underline{\left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)}\left(\frac{g}{a} + \omega^2\right)$$

si $\omega > \sqrt{\frac{g}{a}} \Rightarrow \frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\theta}(\theta_{3,4}) < 0$ estable :)

si $\omega < \sqrt{\frac{g}{a}} \Rightarrow \frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\theta}(\theta_{3,4}) > 0$ inestable :(

Pero del punto anterior sabemos que $\theta_{3,4}$ existen solo cuando $\omega \geq \sqrt{\frac{g}{a}}$, es decir, no existen cuando $\omega < \sqrt{\frac{g}{a}}$, luego

$$\boxed{\theta_{3,4} = \pm \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right) \text{ es estable}} \quad :D \qquad (\text{cuando existe})$$

* Notar que si existe θ_1 estable, no existe $\theta_{3,4}$.

Finalmente, la frecuencia de pequeñas oscilaciones podemos obtenerla de 2 formas:

1. A partir de la frecuencia de oscilación en potencial

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{\partial^2 U}{\partial q_i^2}\bigg|_{q_{eq}}}$$

pero $-\nabla \frac{\partial U}{\partial q_i} = m\frac{\partial \ddot{\vec{r}}}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial q_i^2}\bigg|_{q_{eq}} = -m\frac{\partial \ddot{\vec{r}}}{\partial q_i}\bigg|_{q_{eq}}$, reemplazando

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m}\left(-m\frac{\partial \ddot{\vec{r}}}{\partial q_i}\bigg|_{q_{eq}}\right)} = \sqrt{-\frac{\partial \ddot{\vec{r}}}{\partial q_i}\bigg|_{q_{eq}}}$$

Para este caso, $\omega_0 = \sqrt{-\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \theta}\bigg|_{\theta_{eq}}}$ y reemplazamos para cada pto. de eq. estable. (cuando existen)

$\theta_1 = 0$

$$\omega_0^1 = \sqrt{-\underbrace{\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \theta}\bigg|_0}_{\text{ya lo calculamos !}}} = \sqrt{-\left(\omega^2 - \frac{g}{a}\right)}$$

$$\boxed{\omega_0^1 = \sqrt{\frac{g}{a} - \omega^2}}$$

$\theta_{3,4} = \pm \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)$

$$\omega_0^{3,4} = \sqrt{-\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \theta}\bigg|_{\theta_{3,4}}} = \sqrt{-\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)\left(\frac{g}{a} + \omega^2\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\omega^2}\left(\omega^2 - \frac{g}{a}\right)\left(\frac{g}{a} + \omega^2\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\omega^2}\left(\omega^4 - \frac{g^2}{a^2}\right)}$$

$$\boxed{\omega_0^{3,4} = \sqrt{\omega^2 - \frac{g^2}{\omega^2 a^2}}}$$

2. Definiendo $\delta\theta = \theta - \theta_{eq}$ y reemplazarlo en el EOM (2) PROPUESTO :D

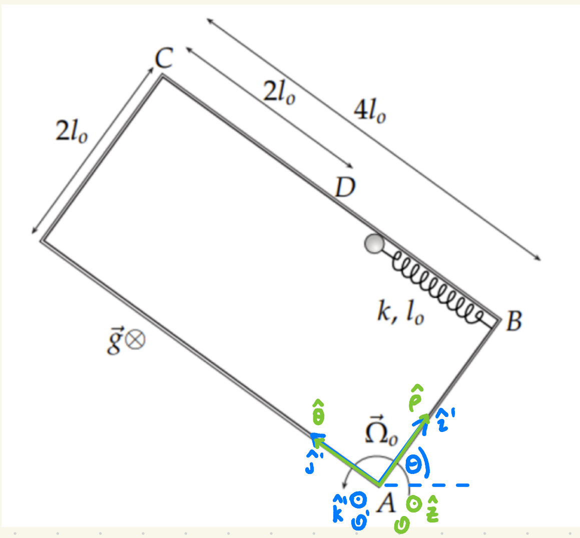
* Nota: para $\theta_1 = 0$ se puede usar $\sin\delta\theta \approx \delta\theta$, $\cos\delta\theta \approx 1$ y sale directo. Pero en $\theta_{3,4}$ no :'(

Comentario ERROR EN AUX

En el aux dije que en caso de escoger base $\{\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{k}\}$ para el sistema inercial S, lo que varía en el cálculo era que $\vec{\Omega}$ será 0. Esto es INCORRECTO, porque S' al girar c/r a S, necesariamente habrá fuerza centrífuga (si $\vec{r} \neq 0$), por lo que $\vec{\Omega}$ no puede ser 0, independiente de la base que escojamos.

La diferencia entre una base u otra está en que cuando expresamos el vector $\vec{R}$ y buscamos relación entre S' y S.

P1 Veamos el caso si en la P1 hubiera usado $S\ \{\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{z}\}$



$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') - 2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'$$
① ② ③ ④

① $\vec{r}' = x\hat{\imath}' + y\hat{\jmath}' \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{\imath}' + \dot{y}\hat{\jmath}'$

$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{\imath}' + \ddot{y}\hat{\jmath}'$

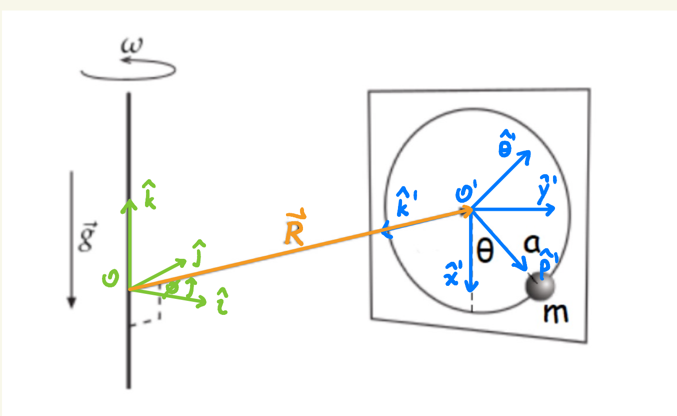
② $\vec{F}_{TOT} = -mg\hat{k}' + N_x\hat{\imath}' + N_z\hat{k}' - k(y-l_0)\hat{\jmath}'$

③ $\vec{R} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{R}} = \ddot{\vec{R}} = 0$

④ $\vec{\Omega} = \Omega_0\hat{k}' \Rightarrow \dot{\vec{\Omega}} = 0$

En este caso nos dio exactamente lo mismo en $\vec{R}$, y como la física no depende de la base de coordenadas, para que me de las mismas ec. de mov. de la forma anterior (en $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$), naturalmente $\vec{\Omega} = \Omega_0\hat{k}$.

P2 Ahora en vez de $\{\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{k}\}$, usemos $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$



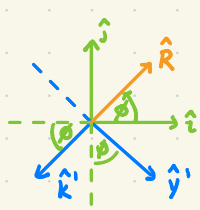
$$m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') - 2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'$$
① ② ③ ④

① $\vec{r}' = a\hat{\rho}' \Rightarrow \dot{\vec{r}}' = a\dot{\theta}\hat{\theta}'$

$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}' = a\ddot{\theta}\hat{\theta}' - a\dot{\theta}^2\hat{\rho}'$

② $\vec{F} = mg\hat{x}' + N_\rho\hat{\rho}' + N_z\hat{k}'$

③ Llamemos ϕ el ángulo entre $\vec{R}$ y $\hat{\imath}$.



$\vec{R} = R\hat{R}$, con $\hat{R} = \cos\phi\,\hat{\imath} + \sin\phi\,\hat{\jmath}$

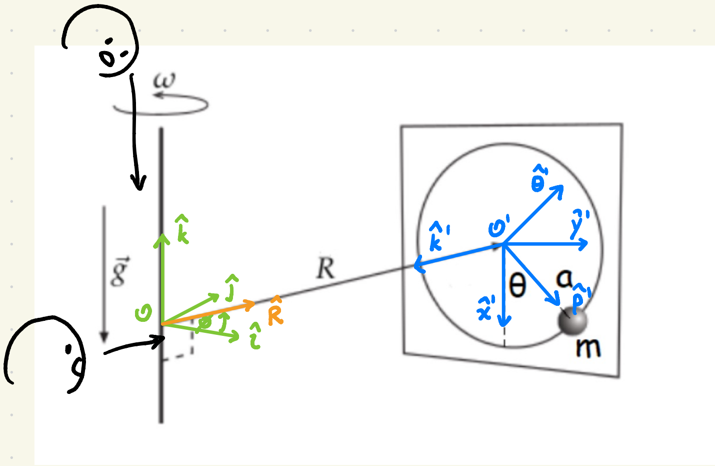
$\vec{R} = R\cos\phi\,\hat{\imath} + R\sin\phi\,\hat{\jmath}$

$\Rightarrow \dot{\vec{R}} = -\dot{\phi}R\sin\phi\,\hat{\imath} + \dot{\phi}R\cos\phi\,\hat{\jmath}$ $\qquad \dot{\phi} = \omega$

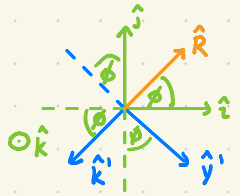
$\Rightarrow \ddot{\vec{R}} = -\omega^2R\cos\phi\,\hat{\imath} - \omega^2R\sin\phi\,\hat{\jmath}$

④ $\vec{\Omega} = \omega\hat{k} \Rightarrow \dot{\vec{\Omega}} = 0$

Ahora, la relación entre S y S'



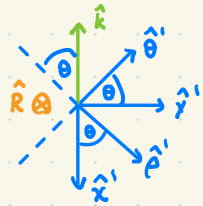
Vista de arriba



$$\hat{\imath} = \sin\phi\, \hat{y}' - \cos\phi\, \hat{k}'$$

$$\hat{\jmath} = -\cos\phi\, \hat{y}' - \sin\phi\, \hat{k}'$$

Vista lateral



$$\hat{k} = -\hat{x}' = -(\cos\theta\, \hat{\rho}' - \sin\theta\, \hat{\theta}')$$

$$\hat{y}' = \sin\theta\, \hat{\rho}' + \cos\theta\, \hat{\theta}'$$

Reemplazamos en $\ddot{\vec{R}}$ y $\vec{\Omega}$

$$\ddot{\vec{R}} = -\omega^2 R\cos\phi\, \hat{\imath} - \omega^2 R\sin\phi\, \hat{\jmath}$$

$$= -\omega^2 R\left[\cos\phi\left(\cancel{\sin\phi\, \hat{y}'} - \cos\phi\, \hat{k}'\right) + \sin\phi\left(\cancel{-\cos\phi\, \hat{y}'} - \sin\phi\, \hat{k}'\right)\right]$$

$$= +\omega^2 R\left[+\cos^2\phi\, \hat{k}' + \sin^2\phi\, \hat{k}'\right]$$

$$= \omega^2 R\, \hat{k}' = -\omega^2 R\, \hat{r}$$

$$\vec{\Omega} = \omega\hat{k} = -\omega(\cos\theta\, \hat{\rho}' - \sin\theta\, \hat{\theta}') = \omega\hat{z}$$

llegamos exactamente a lo mismo! Así que, nuevamente concluimos que $\vec{\Omega} \neq 0$, sea base cilíndrica o cartesiana, para que nos de el mismo $m\ddot{\vec{r}}$.