Auxiliar 16

Lagrangiano

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

P1.-

Considere un sistema formado por 3 masas unidas por un resorte de constante k, y restringidos a moverse unidimensionalmente a lo largo de los resortes.

(a) Encuentre el Lagrangiano del sistema y la ecuación de movimiento para las 3 masas.

(b) Describa los modos y coordenadas normales del sistema.

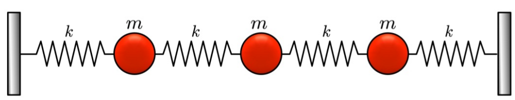


Figura 1: Pregunta 1

P2.-

Considere un bloque de masa m_1 que esta sujeto a una pared inclinada, sobre una cuña de ángulo α, va unnido a un resorte de constante de restitucion k y largo natural l_0. El bloque desliza sin roce en el plano inclinado definido por la cuña (ver figura). A este bloque se le atornilla en su centro de masas un péndulo de largo l y masa m_2, sometido a un campo gravitacional g.

(a) Escriba el Lagrangiano del problema y obtenga las ecuaciones de movimiento.

(b) Determine la configuración de equilibrio estable de este sistema. Dibújela para los ángulos $\alpha = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

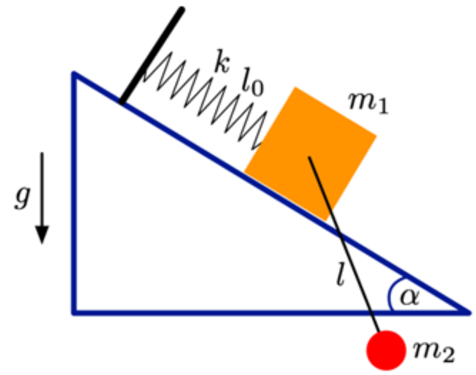


Figura 2: Pregunta 2

P3.-

Dos bloques de masa M, unidos por un resorte de constante k, pueden deslizar sin fricción sobre una barra horizontal. Cada uno tiene unido un péndulo de largo l y masa m.

(a) Escriba el Lagrangiano del problema, y obtenga las cuatro ecuaciones de movimiento respectivas.

(b) Considere pequeñas oscilaciones y linealice las ecuaciones encontradas en (a).

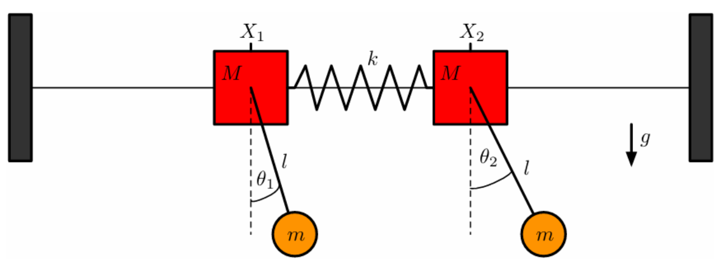


Figura 3: Pregunta 3

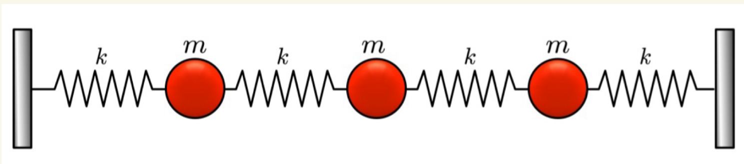
Aux 16 : Lagrangiano

P1)

Considere un sistema formado por 3 masas unidas por un resorte de constante k, y restringidos a moverse unidimensionalmente a lo largo de los resortes.

(a) Encuentre el Lagrangiano del sistema y la ecuación de movimiento para las 3 masas.

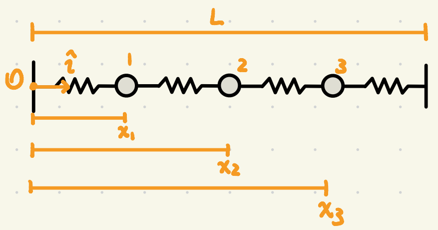
(b) Describa los modos y coordenadas normales del sistema.



a) Para describir la posición de las partículas tenemos 2 formas

FORMA 1

Definiendo las distancias c/r al origen (asumiendo largo natural l_0 y largo total L)



$$\vec{r}_{m_1} = x_1 \hat{i} \qquad \vec{r}_{m_2} = x_2 \hat{i} \qquad \vec{r}_{m_3} = x_3 \hat{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{m_1} = \dot{x}_1 \hat{i} \qquad \vec{v}_{m_2} = \dot{x}_2 \hat{i} \qquad \vec{v}_{m_3} = \dot{x}_3 \hat{i}$$

Luego, el lagrangiano nos queda

$$K = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 \right)$$

$$U = \frac{1}{2} k \left[(x_1 - l_0)^2 + (x_2 - x_1 - l_0)^2 + (x_3 - x_2 - l_0)^2 + (L - x_3 - l_0)^2 \right]$$

$$\Rightarrow L = K - U$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 \right) - \frac{1}{2} k \left[(x_1 - l_0)^2 + (x_2 - x_1 - l_0)^2 + (x_3 - x_2 - l_0)^2 + (L - x_3 - l_0)^2 \right]$$

La ec. de Euler - Lagrange $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

x_1) $\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m \dot{x}_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = m \ddot{x}_1$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k(x_1 - l_0) + k(x_2 - x_1 - l_0) = k(-x_1 + \cancel{l_0} + x_2 - x_1 - \cancel{l_0}) = k(-2x_1 + x_2)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = m \ddot{x}_1 - k(-2x_1 + x_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{x}_1 + \frac{k}{m}(2x_1 - x_2) = 0}$$

x_2) $\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m \dot{x}_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = m \ddot{x}_2$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -k(x_2 - x_1 - l_0) + k(x_3 - x_2 - l_0) = k(-x_2 + x_1 + \cancel{l_0} + x_3 - x_2 - \cancel{l_0}) = k(x_1 - 2x_3 + x_3)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = m \ddot{x}_2 - k(x_1 - 2x_3 + x_3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{x}_2 + \frac{k}{m}(-x_1 + 2x_2 - x_3) = 0}$$

$\underline{x_3}$ $\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = m\dot{x}_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right) = m\ddot{x}_3$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -k(x_3 - x_2 - l_0) + k(L - x_3 - l_0) = k(-x_3 + x_2 + \cancel{l_0} + L - x_3 - \cancel{l_0}) = k(x_2 - 2x_3 + L)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_3} = m\ddot{x}_3 - k(x_2 - 2x_3 + L) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{x}_3 + \frac{k}{m}(-x_2 + 2x_3 - L) = 0}$$

Como los ptos de eq. son $x_{ne} = n\frac{L}{4}$, definimos $\delta x_n = x_n - x_{ne} \Rightarrow \delta\ddot{x}_n = \ddot{x}_n$

$$\begin{cases} \overset{\delta\ddot{x}_1}{\cancel{\ddot{x}_1}} + \frac{k}{m}(2\underset{\delta x_1 + \frac{L}{4}}{\cancel{x_1}} - \overset{\delta x_2 + \frac{2L}{4}}{\cancel{x_2}}) = 0 \\ \overset{\delta\ddot{x}_2}{\cancel{\ddot{x}_2}} + \frac{k}{m}(-\underset{\delta x_1 + \frac{L}{4}}{\cancel{x_1}} + 2\overset{\delta x_2 + \frac{2L}{4}}{\cancel{x_2}} - \underset{\delta x_3 + \frac{3L}{4}}{\cancel{x_3}}) = 0 \\ \overset{\delta\ddot{x}_3}{\cancel{\ddot{x}_3}} + \frac{k}{m}(-\overset{\delta x_2 + \frac{2L}{4}}{\cancel{x_2}} + 2\underset{\delta x_3 + \frac{3L}{4}}{\cancel{x_3}} - L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \delta\ddot{x}_1 + \frac{k}{m}(2\delta x_1 + \cancel{\frac{2L}{4}} - \delta x_2 - \cancel{\frac{2L}{4}}) = 0 \\ \delta\ddot{x}_2 + \frac{k}{m}(-\delta x_1 - \cancel{\frac{L}{4}} + 2\delta x_2 + \cancel{\frac{4L}{4}} - \delta x_3 - \cancel{\frac{3L}{4}}) = 0 \\ \delta\ddot{x}_3 + \frac{k}{m}(-\delta x_2 - \cancel{\frac{2L}{4}} + 2\delta x_3 + \cancel{\frac{6L}{4}} - \cancel{L}) = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta\ddot{x}_1 + \frac{k}{m}(2\delta x_1 - \delta x_2) = 0 \\ \delta\ddot{x}_2 + \frac{k}{m}(-\delta x_1 + 2\delta x_2 - \delta x_3) = 0 \\ \delta\ddot{x}_3 + \frac{k}{m}(-\delta x_2 + 2\delta x_3) = 0 \end{cases}$$

b) Escribiendo matricialmente las ec. de mov.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \delta\ddot{x}_1 \\ \delta\ddot{x}_2 \\ \delta\ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & 2\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & 2\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} = 0$$

calculamos los valores propios

$$\det \begin{bmatrix} 2\frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & 2\frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & 2\frac{k}{m} - \omega^2 \end{bmatrix} = \underline{2\frac{k}{m} - \omega^2}\left[\left(2\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2\right] + \frac{k}{m}\left[-\frac{k}{m}\underline{\left(2\frac{k}{m} - \omega^2\right)}\right] \overset{!}{=} 0$$

Hay que factorizarlo de tal manera que de (algo)×(algo) = 0

$$= \left(2\frac{k}{m} - \omega^2\right)\left[\left(2\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2\right]$$

$$= \left(2\frac{k}{m} - \omega^2\right)\left[\left(2\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 - 2\left(\frac{k}{m}\right)^2\right] \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\frac{k}{m} - \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_1^2 = 2\frac{k}{m}} \\ \text{ó} \\ \left(2\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 - 2\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(2\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 = 2\left(\frac{k}{m}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\frac{k}{m} - \omega^2 = \pm\sqrt{2}\frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{2,3}^2 = 2\frac{k}{m} \pm \sqrt{2}\frac{k}{m}}$$

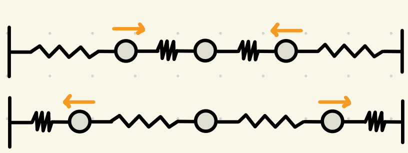
Ahora calculamos los vectores propios

$\underline{\omega_1^2 = 2\frac{k}{m}}$

$$\begin{bmatrix} \cancel{2\frac{k}{m} - 2\frac{k}{m}}^{\,0} & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \cancel{2\frac{k}{m} - 2\frac{k}{m}}^{\,0} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \cancel{2\frac{k}{m} - 2\frac{k}{m}}^{\,0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} F_1: & -\frac{k}{m}b_1 = 0 & \\ F_2: & -\frac{k}{m}a_1 - \frac{k}{m}c_1 = 0 & \Leftrightarrow c_1 = -a_1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_1 = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

esto es →



$\underline{\omega_2^2 = 2\frac{k}{m} + \sqrt{2}\frac{k}{m}}$

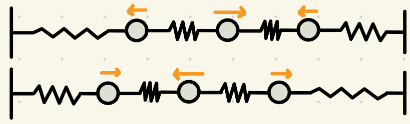
$$\begin{bmatrix} \cancel{2\frac{k}{m} - 2\frac{k}{m}}^{\,0} - \sqrt{2}\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \cancel{2\frac{k}{m} - 2\frac{k}{m}}^{\,0} - \sqrt{2}\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \cancel{2\frac{k}{m} - 2\frac{k}{m}}^{\,0} - \sqrt{2}\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{m}\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$F_1: \; -\sqrt{2}\,a_2 - b_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} b_2$

$F_3: \; -b_2 - \sqrt{2}\,c_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} b_2$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_2 = b_2 \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}} \longrightarrow$$



$$\boxed{\omega_2^2 = 2\frac{k}{m} - \sqrt{2}\frac{k}{m}}$$

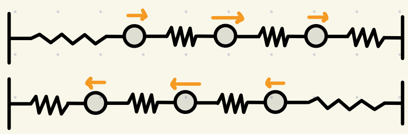
$$\begin{bmatrix} \cancel{2\frac{k}{m} - 2\frac{k}{m}} + \sqrt{2}\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \cancel{2\frac{k}{m} - 2\frac{k}{m}} + \sqrt{2}\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \cancel{2\frac{k}{m} - 2\frac{k}{m}} + \sqrt{2}\frac{k}{m} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{m}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$F_1: \; \sqrt{2}\,a_3 - b_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} b_3$

$F_3: \; -b_3 + \sqrt{2}\,c_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} b_3$

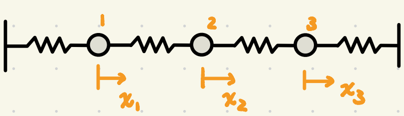
$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_3 = b_3 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}} \longrightarrow$$



FORMA 2

Notamos que en el enunciado no nos dan información sobre lo y L, además, cuando calculamos las ec. de E-L, se eliminaron los lo y al imponer pequeñas oscilaciones, se eliminó el L, así que sería razonable pensar que existe una manera de definir los potenciales, sin involucrar a lo y L.

Así que la segunda manera de definir los x_i es ignorar lo y decir que "x_i es el desplazamiento de la masa i c/r al posición de equilibrio".



⚠ Es un error decir

$\vec{r}_{m1} = lo + x_1 \,\hat{\imath} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{m1} = \dot{x}_1 \,\hat{\imath}$

$\vec{r}_{m2} = 2lo + x_1 + x_2 \,\hat{\imath} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{m2} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \,\hat{\imath}$

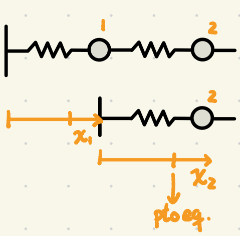
porque en sí, ahora $x_i = r_{mi}$, c/r a su respectivo pto de equilibrio. Pero no nos importa que sean de distinto origen, porque queremos el módulo de su variación y nos dará lo mismo los ctes, que se van a cancelar en las ec. de E-L.

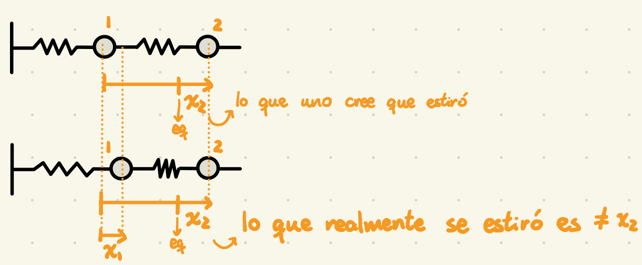
De esta forma

$$U_e = \sum \tfrac{1}{2} k \,(\text{estiramiento del resorte})^2$$

$$= \tfrac{1}{2} k \left[x_1^2 + \underline{(x_2 - x_1)^2} + (x_3 - x_2)^2 + x_3^2 \right]$$

Esto es porque si dejamos m_1 quieto, el estiramiento del 2do resorte será x_2 (es como si m_1 fuera una pared) ⟶ Pero como m_1 se mueve, se tiene que restar su desplazamiento x_1





$\Rightarrow \Delta r_{m2} = x_2 - x_1$

$$\Rightarrow L = \tfrac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 \right) - \tfrac{1}{2} k \left[x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + x_3^2 \right]$$

Derivando nos debe dar lo mismo que el otro método. (Propuesto :D)

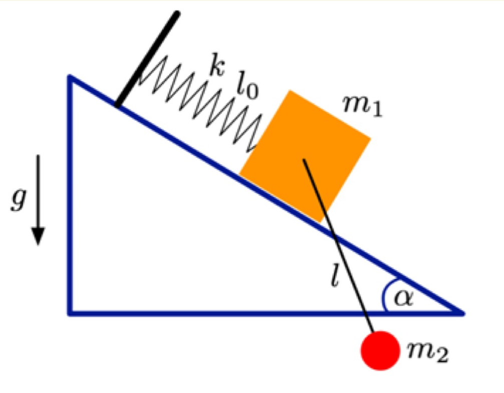
P2 |

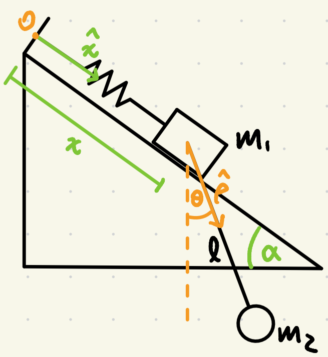
Considere un bloque de masa m_1 que esta sujeto a una pared inclinada, sobre una cuña de ángulo α, va unnido a un resorte de constante de restitucion k y largo natural l_0. El bloque desliza sin roce en el plano inclinado definido por la cuña (ver figura). A este bloque se le atornilla en su centro de masas un péndulo de largo l y masa m_2, sometido a un campo gravitacional g.

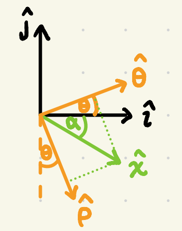
(a) Escriba el Lagrangiano del problema y obtenga las ecuaciones de movimiento.

(b) Determine la configuración de equilibrio estable de este sistema. Dibújela para los ángulos $\alpha = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

a) Notamos que las dos masas realizan sus movimientos según distintas sistemas de coordenadas, así que primero, hay que encontrar una relación entre ellas.







$$\Rightarrow \quad \hat{x} = \sin(\alpha+\theta)\hat{\rho} + \cos(\alpha+\theta)\,\hat{\theta}$$

Para la energía cinética, partamos con la posición de las masas

$$\vec{r}_{m_1} = x\,\hat{x} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{m_1} = \dot{x}\,\hat{x} \quad \Rightarrow \quad v_{m_1}^2 = \dot{x}^2$$

$$\vec{r}_{m_2} = x\,\hat{x} + l\,\hat{\rho} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{m_2} = \dot{x}\,\hat{x} + l\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$\hat{x} = \sin(\alpha+\theta)\hat{\rho} + \cos(\alpha+\theta)\,\hat{\theta}$

$$= \dot{x}\left[\sin(\alpha+\theta)\hat{\rho} + \cos(\alpha+\theta)\,\hat{\theta}\right] + l\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$= \dot{x}\sin(\alpha+\theta)\hat{\rho} + \left[\dot{x}\cos(\alpha+\theta) + l\dot{\theta}\right]\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad v_{m_2}^2 = \dot{x}^2\sin^2(\alpha+\theta) + \left[\dot{x}\cos(\alpha+\theta) + l\dot{\theta}\right]^2$$

$$= \dot{x}^2\underline{\sin^2(\alpha+\theta)} + \dot{x}^2\underline{\cos^2(\alpha+\theta)} + 2\dot{x}\cos(\alpha+\theta)\,l\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2$$

$\sin^2(\cdot) + \cos^2(\cdot) = 1$

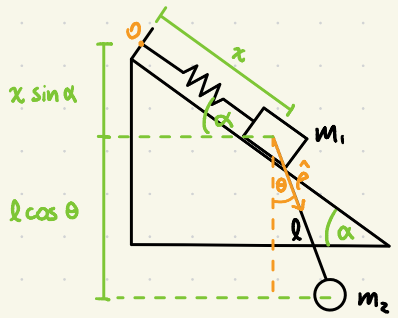
$$= \dot{x}^2 + 2\dot{x}\cos(\alpha+\theta)\,l\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2$$

$$\therefore \quad K = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\cos(\alpha+\theta)\,l\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(2\dot{x}\cos(\alpha+\theta)\,l\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2\right)$$

Por otro lado, las energías potenciales

$$U = U_e + U_g = \frac{1}{2}k(x-l_0)^2 + U_g$$

Definiendo potencial gravitatoria igual a 0 en el origen



$$U_g = m_1 g(-x\sin\alpha) + m_2 g(-x\sin\alpha - l\cos\theta)$$

$$\Rightarrow U = \tfrac{1}{2}k(x-l_0)^2 - (m_1+m_2)xg\sin\alpha - m_2 g l\cos\theta$$

Así, el Lagrangiano queda

$$L = \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m_2\left(2\dot{x}\cos(\alpha+\theta)l\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2\right) - \tfrac{1}{2}k(x-l_0)^2 + (m_1+m_2)xg\sin\alpha + m_2 g l\cos\theta$$

luego, las ec. E-L

$\underline{x}]$ $\quad \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\dot{x} + m_2\dot{x}\cos(\alpha+\theta)l\dot{\theta}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1+m_2)\ddot{x} + m_2\ddot{x}\cos(\alpha+\theta)l\dot{\theta} - m_2\dot{x}\sin(\alpha+\theta)l\dot{\theta}^2 + m_2\dot{x}\cos(\alpha+\theta)l\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -k(x-l_0) + (m_1+m_2)g\sin\alpha$$

$$\therefore\ (m_1+m_2)\ddot{x} + m_2\ddot{x}\cos(\alpha+\theta)l\dot{\theta} - m_2\dot{x}\sin(\alpha+\theta)l\dot{\theta} + m_2\dot{x}\cos(\alpha+\theta)l\ddot{\theta} + k(x-l_0) - (m_1+m_2)g\sin\alpha = 0$$

$\underline{\theta}]$ $\quad \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_2\dot{x}\cos(\alpha+\theta)l + m_2 l^2\dot{\theta}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m_2\ddot{x}\cos(\alpha+\theta)l - m_2\dot{x}\sin(\alpha+\theta)l\dot{\theta} + m_2 l^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m_2\dot{x}\sin(\alpha+\theta) - m_2 g l\sin\theta$$

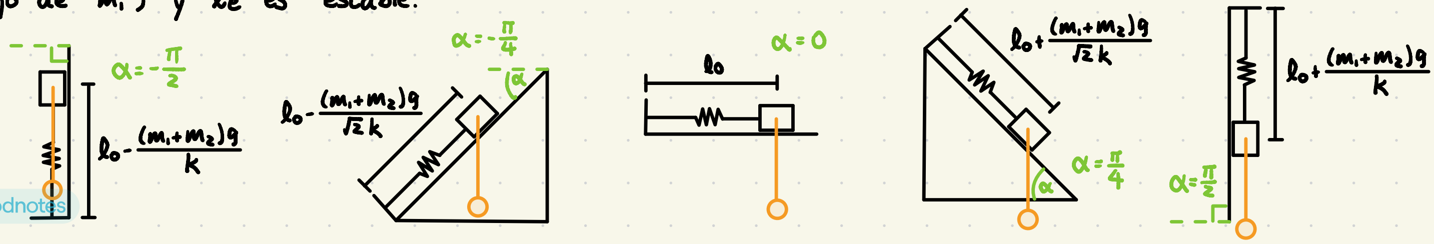
$$\therefore\ m_2\ddot{x}\cos(\alpha+\theta)l - m_2\dot{x}\sin(\alpha+\theta)l\dot{\theta} + m_2 l^2\ddot{\theta} + m_2\dot{x}\sin(\alpha+\theta) + m_2 g l\sin\theta = 0$$

Para el (los) pto(s) de equilibrio, imponemos $\dot{x} = \ddot{x} = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, así

$$\begin{cases} (m_1+m_2)\cancel{\ddot{x}} + m_2\cancel{\ddot{x}}\cos(\alpha+\theta)l\cancel{\dot{\theta}} - m_2\cancel{\dot{x}}\sin(\alpha+\theta)l\cancel{\dot{\theta}} + m_2\cancel{\dot{x}}\cos(\alpha+\theta)l\cancel{\ddot{\theta}} + k(x-l_0) - (m_1+m_2)g\sin\alpha = 0 \\ m_2\cancel{\ddot{x}}\cos(\alpha+\theta)l - m_2\cancel{\dot{x}}\sin(\alpha+\theta)l\cancel{\dot{\theta}} + m_2 l^2\cancel{\ddot{\theta}} + m_2\cancel{\dot{x}}\sin(\alpha+\theta) + m_2 g l\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k(x-l_0) - (m_1+m_2)g\sin\alpha = 0 & \Rightarrow \boxed{x_e = \dfrac{(m_1+m_2)g\sin\alpha}{k} + l_0} \\ m_2 g l\sin\theta = 0 & \Rightarrow \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\theta_e = \pi k,\quad k\in\mathbb{Z}} \end{cases}$$

Es directo notar que los ptos de eq. estables se tienen para k par (cuando m_2 está justo abajo de m_1) y x_e es estable.

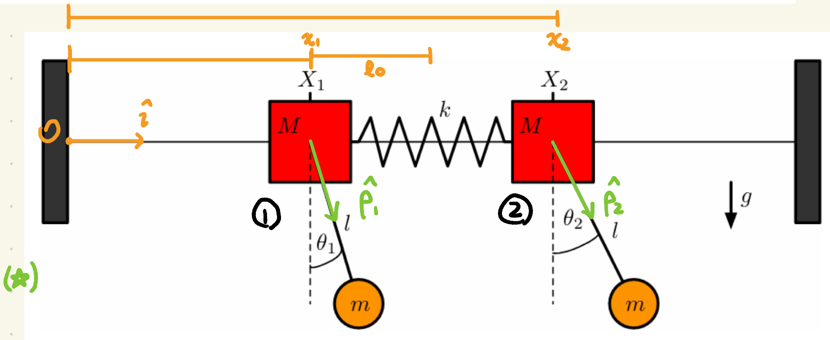


P3

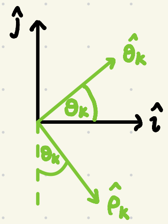
Dos bloques de masa M, unidos por un resorte de constante k, pueden deslizar sin fricción sobre una barra horizontal. Cada uno tiene unido un péndulo de largo l y masa m.

(a) Escriba el Lagrangiano del problema, y obtenga las cuatro ecuaciones de movimiento respectivas.

(b) Considere pequeñas oscilaciones y linealice las ecuaciones encontradas en (a).



a) Análogo a P2, encontremos relaciones entre los sistemas de coordenadas



$$\Rightarrow \hat{i} = \sin\theta_k\,\hat{\rho}_k + \cos\theta_k\,\hat{\theta}_k \quad (*)$$

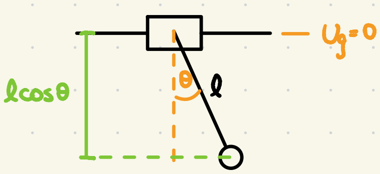
Luego la energía cinética, partiendo de las posiciones

$$\begin{cases} \vec{r}_{M1} = x_1\,\hat{i} \\ \vec{r}_{M2} = x_2\,\hat{i} \\ \vec{r}_{m1} = x_1\,\hat{i} + \ell\,\hat{\rho}_1 \\ \vec{r}_{m2} = x_2\,\hat{i} + \ell\,\hat{\rho}_2 \end{cases} \Rightarrow \text{velocidad} = \begin{cases} \vec{v}_{M1} = \dot{x}_1\,\hat{i} \\ \vec{v}_{M2} = \dot{x}_2\,\hat{i} \\ \vec{v}_{m1} = \dot{x}_1\,\hat{i} + \ell\dot{\theta}_1\hat{\theta}_1 \overset{(*)}{=} \dot{x}_1\sin\theta_1\,\hat{\rho}_1 + \left[\dot{x}_1\cos\theta_1 + \ell\dot{\theta}_1\right]\hat{\theta}_1 \\ \vec{v}_{m2} = \dot{x}_2\,\hat{i} + \ell\dot{\theta}_2\hat{\theta}_2 \overset{(*)}{=} \dot{x}_2\sin\theta_2\,\hat{\rho}_2 + \left[\dot{x}_2\cos\theta_2 + \ell\dot{\theta}_2\right]\hat{\theta}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{rapidez}^2 = \begin{cases} v_{M1}^2 = \dot{x}_1^2 \\ v_{M2}^2 = \dot{x}_2^2 \\ v_{m1}^2 = \dot{x}_1^2\sin^2\theta_1 + \left[\dot{x}_1\cos\theta_1 + \ell\dot{\theta}_1\right]^2 = \dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1\cos\theta_1\,\ell\dot{\theta}_1 + \ell^2\dot{\theta}_1^2 \\ v_{m2}^2 = \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_2\cos\theta_2\,\ell\dot{\theta}_2 + \ell^2\dot{\theta}_2^2 \end{cases}$$

$$\therefore K = \underbrace{\tfrac{1}{2}M(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)}_{\text{masas } M_1 \text{ y } M_2} + \underbrace{\tfrac{1}{2}m\left[\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1\cos\theta_1\,\ell\dot{\theta}_1 + \ell^2\dot{\theta}_1^2\right]}_{\text{masa } m_1} + \underbrace{\tfrac{1}{2}m\left[\dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_2\cos\theta_2\,\ell\dot{\theta}_2 + \ell^2\dot{\theta}_2^2\right]}_{\text{masa } m_2}$$

Ahora energía potencial, definiendo $U_g = 0$ a la altura del origen y asumiendo $\ell_0 = 0$



$$\Rightarrow U = \tfrac{1}{2}k(x_2 - x_1 - \cancel{\ell_0})^2 - mg\ell\cos\theta_1 - mg\ell\cos\theta_2$$

$$= \underbrace{\tfrac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2}_{U_e} \underbrace{- mg\ell\left[\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right]}_{U_g}$$

* Como el enunciado no dice nada sobre ℓ_0, también se puede resolver asumiendo $\ell_0 \neq 0$, solo que se agrega un término que escribir ˆoˆ

Made with Goodnotes

Escribiendo el Lagrangiano

$$L = \tfrac{1}{2}M(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2) + \tfrac{1}{2}m\left[\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1\cos\theta_1 \, l\dot{\theta}_1 + l^2\dot{\theta}_1^2\right] + \tfrac{1}{2}m\left[\dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_2\cos\theta_2 \, l\dot{\theta}_2 + l^2\dot{\theta}_2^2\right]$$
$$- \tfrac{1}{2}k(x_2-x_1)^2 + mgl\left[\cos\theta_1+\cos\theta_2\right]$$

Derivando a las ec. de E-L , $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

$\underline{x_1|}$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = M\dot{x}_1 + m\left[\dot{x}_1 + \cos\theta_1 \, l\dot{\theta}_1\right] \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = M\ddot{x}_1 + m\left[\ddot{x}_1 - \sin\theta_1 \, l\dot{\theta}_1^2 + \cos\theta_1 \, l\ddot{\theta}_1\right]$

$\frac{\partial L}{\partial x_1} = +k(x_2 - x_1)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = M\ddot{x}_1 + m\left[\ddot{x}_1 - \sin\theta_1 \, l\dot{\theta}_1^2 + \cos\theta_1 \, l\ddot{\theta}_1\right] - k(x_2-x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(M+m)\ddot{x}_1 + ml\cos\theta_1\,\ddot{\theta}_1 - ml\sin\theta_1\,\dot{\theta}_1^2 + kx_1 - kx_2 = 0}$$

$\underline{x_2|}$ Análogo al caso x_1

$$\boxed{(M+m)\ddot{x}_2 + ml\cos\theta_2\,\ddot{\theta}_2 - ml\sin\theta_2\,\dot{\theta}_2^2 - kx_1 + kx_2 = 0}$$

$\underline{\theta_1|}$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = ml\dot{x}_1\cos\theta_1 + ml^2\dot{\theta}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = ml\ddot{x}_1\cos\theta_1 - ml\dot{x}_1\sin\theta_1\,\dot{\theta}_1 + ml^2\ddot{\theta}_1$

$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -ml\dot{x}_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - mgl\sin\theta_1$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = ml\ddot{x}_1\cos\theta_1 \cancel{- ml\dot{x}_1\sin\theta_1\,\dot{\theta}_1} + ml^2\ddot{\theta}_1 \cancel{+ ml\dot{x}_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1} + mgl\sin\theta_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{ml\cos\theta_1\,\ddot{x}_1 + ml^2\ddot{\theta}_1 + mgl\sin\theta_1 = 0}$$

$\underline{\theta_2|}$ Análogo al caso θ_1

$$\boxed{ml\cos\theta_2\,\ddot{x}_2 + ml^2\ddot{\theta}_2 + mgl\sin\theta_2 = 0}$$

b) Para las pequeñas oscilaciones , consideramos

$$\sin\theta_k \approx \theta_k \qquad \cos\theta_k \approx 1 \qquad \dot{\theta}_k^2 \approx \dot{\theta}_k\dot{x}_k \approx 0 \qquad (\text{con } k=1,2)$$

reemplazando en las ec. de mov. para encontrar ec. lineales

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x}_1 + ml\cancelto{1}{\cos\theta_1}\,\ddot{\theta}_1 - ml\cancelto{\theta_1}{\sin\theta_1}\,\cancelto{0}{\dot{\theta}_1^2} + kx_1 - kx_2 = 0 \\ (M+m)\ddot{x}_2 + ml\cancelto{1}{\cos\theta_2}\,\ddot{\theta}_2 - ml\cancelto{\theta_2}{\sin\theta_2}\,\cancelto{0}{\dot{\theta}_2^2} - kx_1 + kx_2 = 0 \\ ml\cancelto{1}{\cos\theta_1}\,\ddot{x}_1 + ml^2\ddot{\theta}_1 + mgl\cancelto{\theta_1}{\sin\theta_1} = 0 \\ ml\cancelto{1}{\cos\theta_2}\,\ddot{x}_2 + ml^2\ddot{\theta}_2 + mgl\cancelto{\theta_2}{\sin\theta_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} (M+m)\ddot{x}_1 + ml\ddot{\theta}_1 + kx_1 - kx_2 = 0 \\ (M+m)\ddot{x}_2 + ml\ddot{\theta}_2 - kx_1 + kx_2 = 0 \\ ml\ddot{x}_1 + ml^2\ddot{\theta}_1 + mgl\theta_1 = 0 \\ ml\ddot{x}_2 + ml^2\ddot{\theta}_2 + mgl\theta_2 = 0 \end{cases}}$$