Auxiliar 13

Energía V y pequeñas oscilaciones

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

P1.-

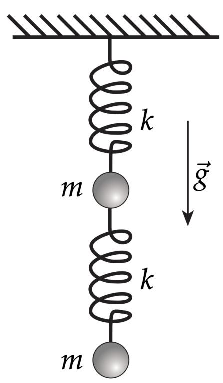
Dos partículas de igual masa m están unidas por un resorte de constante elástica k. Una de las partículas está unida al techo por otro resorte idéntico, también de constante elástica k, y la otra partícula cuelga libremente. Considere movimiento vertical solamente.

a) Únicamente ocupando análisis dimensional y las constantes del problema, encuentre cuál debería ser la dependencia de las frecuencias de oscilación

b) Exprese la energía total del sistema

c) Calcule las frecuencias propias del sistema

d) Determine los modos normales del sistema y descríbalos cualitativamente



Ahora, considere el caso más general en que la partícula superior tiene masa m_2 y la inferior m_1. Además, la constante elástica del resorte atado al techo es k_2 y el otro k_1.

a) Encuentre la frecuencia de oscilación de la partícula inferior cuando $m_2 \to 0$

b) Discuta la similitud con la resistencia equivalente de un circuito eléctrico cerrado

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2,$$
$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

para resistencias R_i en serie y en paralelo respectivamente.

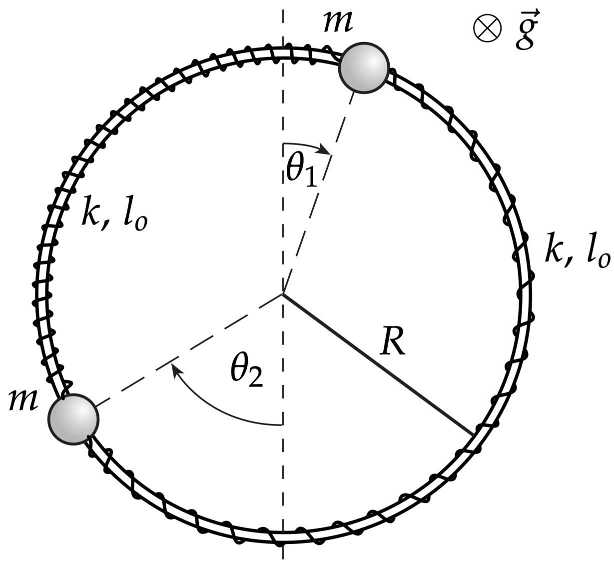
P2.-

Dos masas iguales que se deslizan sin roce por un riel circunferencial de radio R, se encuentran acopladas por dos resortes iguales, de constante elástica k y largo natural l_0. Suponga que el plano definido por el círculo es perpendicular a la gravedad, de modo que ésta no afecta la dinámica de las masas.

a) Determine la configuración de equilibrio

b) Calcule las frecuencias propias de oscilación

c) Determine los modos propios de oscilación. ¿A qué tipo de movimiento corresponde cada una?



Formulario

Ecuaciones de movimiento pequeñas oscilaciones

Para un problema de 2 grados de libertad tenemos que las ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones se puede escribir como

$$\delta\ddot{q}_1 + \frac{1}{m_1}\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\bigg|_{\mathrm{e}}\delta q_1 + \frac{1}{m_1}\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\bigg|_{\mathrm{e}}\delta q_2 = 0$$

$$\delta\ddot{q}_2 + \frac{1}{m_2}\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\bigg|_{\mathrm{e}}\delta q_2 + \frac{1}{m_1}\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\bigg|_{\mathrm{e}}\delta q_1 = 0,$$

donde definimos $\delta q_i(t) := q_i(t) - q_{i,\mathrm{e}}$ con $q_{i,\mathrm{e}}$ la posición de equilibrio dada por

$$\frac{\partial U}{\partial q_i}\bigg|_{\mathrm{e}} = 0,$$

con e representando que se evalúa la cantidad en la posición de equilibrio y U la energía potencial total del sistema.

Nótese que con 2 grados de libertad podemos estar hablando de un sistema con 2 partículas distintas que se mueven en 1 dimensión, o de un sistema con 1 sola partícula que se mueve en 2 dimensiones.

Ecuación de autovalores

A partir de un sistema de ecuaciones de movimiento de la forma

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{\xi} + \Omega^2\vec{\xi} = \vec{0},$$

con Ω^2 una matriz cuadrada de dimensión igual a la cantidad de grados de libertad, las frecuencias de oscilación ω^2 se calculan según

$$\det\left(\Omega^2 - \omega^2 I\right) = 0,$$

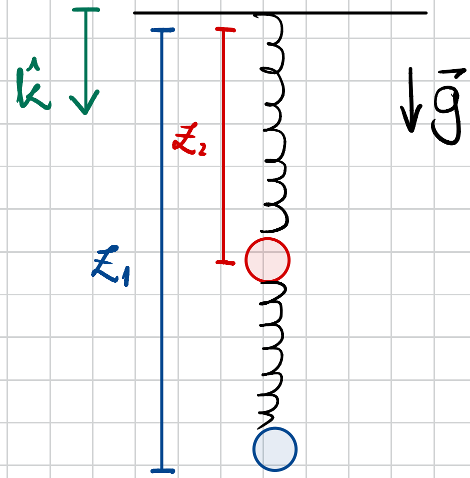
con I la matriz identidad.
Adicionalmente, se pueden calcular los autovectores asociados usando

$$\left(\Omega^2 - \omega^2 I\right)\vec{v} = \vec{0},$$

donde debemos evaluar los distintos valores de ω^2 y de esta forma encontrar $\vec{v}$.

Auxiliar 13

P1



a) Las ctes. del problema son: g, m, k, l_0 donde

$$[g] = \frac{L}{T^2}, \quad [m] = M, \quad [k] = \frac{M}{T^2}, \quad [l_0] = L$$

y la frecuencia de oscilación debe tener dimensiones de

$$[\omega_0] = \frac{1}{T}$$

Por lo tanto, tenemos 2 opciones: $\omega_0 \propto \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \vee \quad \omega_0 \propto \sqrt{\frac{g}{l_0}}$

b) La energía cinética es simplemente

$$K_{tot} = \sum_i K_i = \frac{1}{2} m \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}_2^2$$

Mientras que para la energía potencial tenemos la contribución del peso y de los resortes:

$$U_{tot} = U_{tot}^{P} + U_{tot}^{R}$$

$$= -mgz_1 - mgz_2 + \frac{1}{2}k(z_2 - l_0)^2 + \frac{1}{2}k(z_1 - z_2 - l_0)^2$$

c) Calculemos las derivadas de U_{tot} c/r a z_1 y z_2 e igualemos a 0 para encontrar las posiciones de equilibrio

- $\left.\frac{\partial U}{\partial z_1}\right|_e = -mg + k(z_{1,e} - z_{2,e} - l_0) \overset{!}{=} 0$

- $\frac{\partial U_{tot}}{\partial z_2} = -mg + k(z_{2,e} - l_0) - k(z_1 - z_2 - l_0) \overset{!}{=} 0$

Resolviendo este sist. algebraico

$$z_{1,e} = 2l_0 + 3\frac{gm}{k} \quad \wedge \quad z_{2,e} = l_0 + 2\frac{gm}{k}$$

Ahora calculemos las segundas derivadas de U_{tot} y evaluamos en estas posiciones de equilibrio

$$\triangleright\ \left.\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial z_1^2}\right|_e = k \qquad \triangleright\ \left.\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial z_2^2}\right|_e = 2k \qquad \triangleright\ \frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial z_1 \partial z_2} = -k$$

y ocupamos el formulario para escribir

$$\delta\ddot{z}_1 + \frac{k}{m}\delta z_1 - \frac{k}{m}\delta z_2 = 0, \qquad \delta\ddot{z}_2 + \frac{2k}{m}\delta z_2 - \frac{k}{m}\delta z_1 = 0$$

que podemos escribir de forma matricial como

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}\delta z_1\\ \delta z_2\end{pmatrix} + \frac{k}{m}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta z_1\\ \delta z_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \ddot{\vec{\xi}} + \Omega^2_{2\times2}\vec{\xi} = \vec{0}$$

Sabemos que las frecuencias de oscilación están dadas por $\det(\Omega^2_{2\times2} - \omega^2 \mathbb{1}) = 0$, o sea

$$\begin{vmatrix} k/m - \omega^2 & -k/m \\ -k/m & 2k/m - \omega^2\end{vmatrix} = (k/m - \omega^2)(2k/m - \omega^2) - (k/m)^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_1^2 = \frac{k}{m}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)} \ \wedge\ \boxed{\omega_2^2 = \frac{k}{m}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

★ Recuerden a)

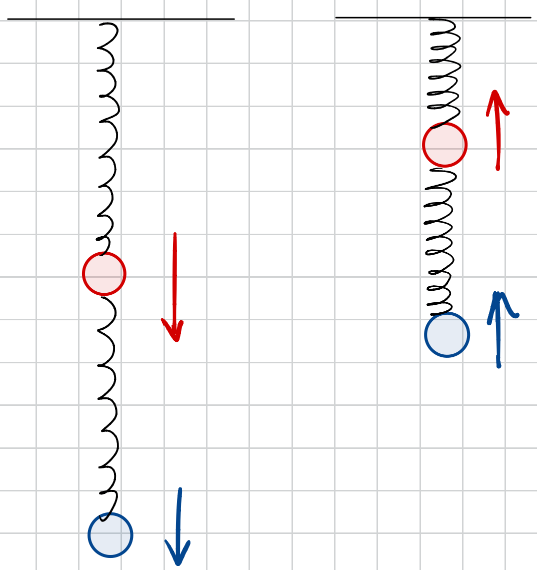
d) Los modos normales están dados por los autovectores asociados a ω_i^2. Empecemos con ω_1^2

$$\frac{k}{m}\begin{pmatrix}1-(3-\sqrt{5})/2 & -1\\ -1 & 2-(3-\sqrt{5})/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)a_1 = b_1 \Rightarrow \vec{v}_1 = a_1\begin{pmatrix}1\\ (-1+\sqrt{5})/2\end{pmatrix} \begin{matrix}+\\+\end{matrix}$$

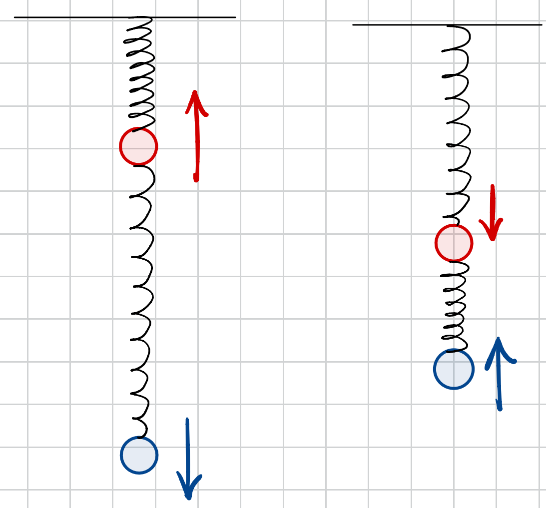
Ahora para ω_2^2

$$\frac{k}{m}\begin{pmatrix}1-(3+\sqrt{5})/2 & -1\\ -1 & 2-(3+\sqrt{5})/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)a_2 = b_2 \Rightarrow \vec{v}_2 = a_2\begin{pmatrix}1\\ -(1+\sqrt{5})/2\end{pmatrix} \begin{matrix}+\\-\end{matrix}$$

Modo de oscilación $\vec{v}_1$



Modo de oscilación $\vec{v}_2$



a) El sistema de ecuaciones está dado de forma general (distintas masas y resortes) por

$$m_1 \ddot{z}_1 = m_1 g - k_1 (z_1 - z_2 - l_0) \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g - k_2 (z_2 - l_0) + k_1 (z_1 - z_2 - l_0) \quad (2)$$

donde en (2) podemos tomar $m_2 \to 0$ y encontrar una expresión de z_2 en función de z_1

$$(2) \Rightarrow -k_2 (z_2 - l_0) + k_1 (z_1 - z_2 - l_0) = 0 \quad \Rightarrow z_2 = \frac{1}{k_1 + k_2} \left(k_1 z_1 - l_0 (k_1 - k_2) \right)$$

que reemplazando en (1)

frecuencia de oscilación

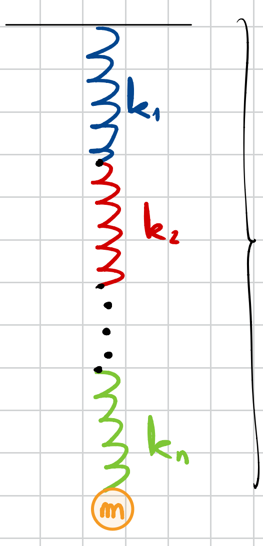
$$m_1 \ddot{z}_1 = m_1 g - \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} z_1 + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} 2 l_0 \iff \ddot{z}_1 + \omega_0^2 z_1 = ctes.$$

donde definimos $\omega_0 := \sqrt{\frac{1}{m_1} \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}} = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_1}}$

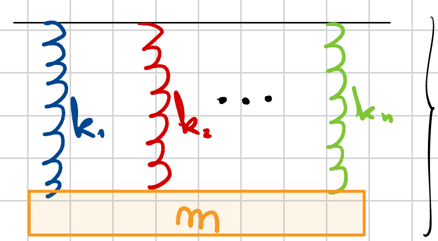
Notemos que $\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \equiv k_{eq}$, o sea, recuperamos un resultado similar a R_{eq} en un sistema con resistencias R_1 y R_2 en paralelo, solo que nuestros resortes están en serie. De poner resortes en paralelo la constante elástica equivalente sería

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

que es la fórmula para R_{eq} en un circuito con resistencias puestas en serie.

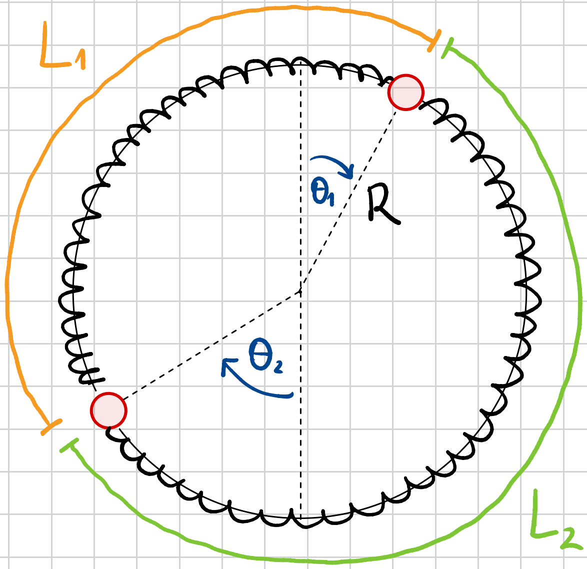


$$\frac{1}{k_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}$$



$$k_{eq} = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

P2



a) La energía cinética está dada por

$$K_{tot} = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}_2^2$$

y para la potencial solo tenemos la de los resortes

$$U_{tot} = \frac{1}{2} k (L_1 - l_0)^2 + \frac{1}{2} k (L_2 - l_0)^2$$

donde, por geometría,

$$L_1 = R\theta_1 + R(\pi - \theta_2) \quad y \quad L_2 = R\theta_2 + R(\pi - \theta_1)$$

entonces

$$U_{tot}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} k R^2 (\theta_1 - \theta_2 + \pi - l_0)^2 + \frac{1}{2} k R^2 (\theta_2 - \theta_1 + \pi - l_0)^2$$

Tenemos que derivar e igualar a 0 para encontrar $\theta_{i,e}$

- $\left.\frac{\partial U_{tot}}{\partial \theta_1}\right|_e = kR^2(\theta_{1e} - \theta_{2e} + \pi - l_0) - kR^2(\theta_{2e} - \theta_{1e} + \pi - l_0) = 2kR^2(\theta_{1,e} - \theta_{2,e}) = 0$

- $\left.\frac{\partial U_{tot}}{\partial \theta_2}\right|_e = -kR^2(\theta_{1e} - \theta_{2e} + \pi - l_0) + kR^2(\theta_{2e} - \theta_{1e} + \pi - l_0) = 2kR^2(\theta_{2,e} - \theta_{1,e}) = 0$

con lo que concluimos que $\theta_{1,e} = \theta_{2,e}$ válido para cualquier ángulo.

b) Calculamos las segundas derivadas

- $\left.\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial \theta_1^2}\right|_e = 2kR^2$
- $\left.\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial \theta_2^2}\right|_e = 2kR^2$
- $\left.\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right|_e = -2kR^2$

Adicionalmente, notemos que la energía cinética es de la forma

$$K_i = \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}_i^2$$

entonces al reemplazar en las EoMs para el caso de 2 grados de libertad, consideraremos la masa como mR^2

$$\delta\ddot{\theta}_1 + \frac{2k}{m}\delta\theta_1 - \frac{2k}{m}\delta\theta_2 = 0, \qquad \delta\ddot{\theta}_2 + \frac{2k}{m}\delta\theta_2 - \frac{2k}{m}\delta\theta_1 = 0$$

que de forma matricial es

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}\delta\theta_1\\ \delta\theta_2\end{pmatrix} + \frac{2k}{m}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\theta_1\\ \delta\theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

así que las frecuencias de oscilación están dadas por la ec. de autovalores

$$\begin{vmatrix}2k/m - \omega^2 & -2k/m\\ -2k/m & 2k/m-\omega^2\end{vmatrix} = (2k/m-\omega^2)^2 - 4(k/m)^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{\omega_1^2 = 0} \wedge \boxed{\omega_2^2 = \frac{4k}{m}}$$

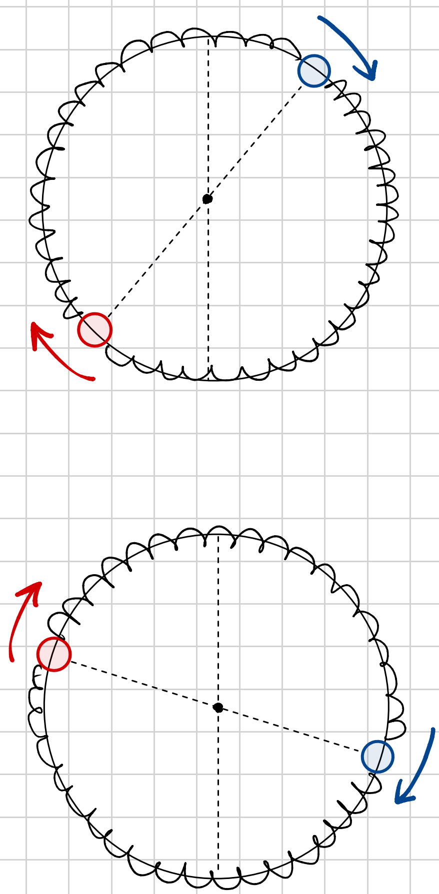
c) Calculemos los vectores propios asociados a cada autovalor. Primero para ω_1^2

$$\frac{2k}{m}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = b_1 \Rightarrow \vec{v}_1 = a_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \begin{matrix}+\\+\end{matrix}$$

Ahora para ω_2^2

$$\frac{2k}{m}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = -b_2 \Rightarrow \vec{v}_2 = a_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \begin{matrix}+\\-\end{matrix}$$

Modo de oscilación $\vec{v}_1$



Modo de oscilación $\vec{v}_2$