Auxiliar 13

Energía V y pequeñas oscilaciones

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

P1.-

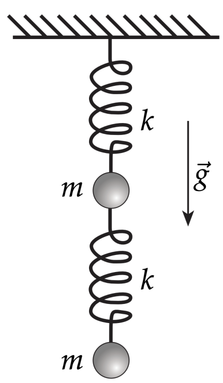
Dos partículas de igual masa m están unidas por un resorte de constante elástica k. Una de las partículas está unida al techo por otro resorte idéntico, también de constante elástica k, y la otra partícula cuelga libremente. Considere movimiento vertical solamente.

a) Únicamente ocupando análisis dimensional y las constantes del problema, encuentre cuál debería ser la dependencia de las frecuencias de oscilación

b) Exprese la energía total del sistema

c) Calcule las frecuencias propias del sistema

d) Determine los modos normales del sistema y descríbalos cualitativamente



Ahora, considere el caso más general en que la partícula superior tiene masa m_2 y la inferior m_1. Además, la constante elástica del resorte atado al techo es k_2 y el otro k_1.

a) Encuentre la frecuencia de oscilación de la partícula inferior cuando $m_2 \to 0$

b) Discuta la similitud con la resistencia equivalente de un circuito eléctrico cerrado

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2,$$
$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

para resistencias R_i en serie y en paralelo respectivamente.

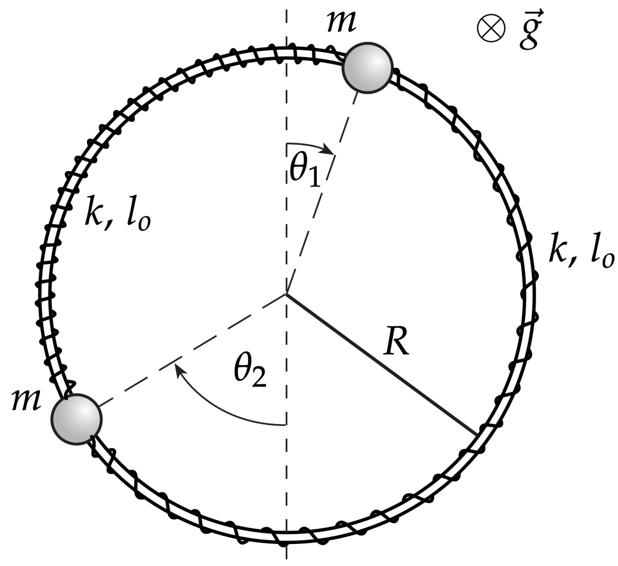
P2.-

Dos masas iguales que se deslizan sin roce por un riel circunferencial de radio R, se encuentran acopladas por dos resortes iguales, de constante elástica k y largo natural l_0. Suponga que el plano definido por el círculo es perpendicular a la gravedad, de modo que ésta no afecta la dinámica de las masas.

a) Determine la configuración de equilibrio

b) Calcule las frecuencias propias de oscilación

c) Determine los modos propios de oscilación. ¿A qué tipo de movimiento corresponde cada una?



Formulario

Ecuaciones de movimiento pequeñas oscilaciones

Para un problema de 2 grados de libertad tenemos que las ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones se puede escribir como

$$\delta\ddot{q}_1 + \frac{1}{m_1}\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\bigg|_{\mathrm{e}} \delta q_1 + \frac{1}{m_1}\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\bigg|_{\mathrm{e}} \delta q_2 = 0$$
$$\delta\ddot{q}_2 + \frac{1}{m_2}\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\bigg|_{\mathrm{e}} \delta q_2 + \frac{1}{m_1}\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\bigg|_{\mathrm{e}} \delta q_1 = 0,$$

donde definimos $\delta q_i(t) := q_i(t) - q_{i,\mathrm{e}}$ con $q_{i,\mathrm{e}}$ la posición de equilibrio dada por

$$\frac{\partial U}{\partial q_i}\bigg|_{\mathrm{e}} = 0,$$

con e representando que se evalúa la cantidad en la posición de equilibrio y U la energía potencial total del sistema.

Nótese que con 2 grados de libertad podemos estar hablando de un sistema con 2 partículas distintas que se mueven en 1 dimensión, o de un sistema con 1 sola partícula que se mueve en 2 dimensiones.

Ecuación de autovalores

A partir de un sistema de ecuaciones de movimiento de la forma

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{\xi} + \Omega^2\vec{\xi} = \vec{0},$$

con Ω^2 una matriz cuadrada de dimensión igual a la cantidad de grados de libertad, las frecuencias de oscilación ω^2 se calculan según

$$\det\Big(\Omega^2 - \omega^2 I\Big) = 0,$$

con I la matriz identidad.
Adicionalmente, se pueden calcular los autovectores asociados usando

$$\Big(\Omega^2 - \omega^2 I\Big)\vec{v} = \vec{0},$$

donde debemos evaluar los distintos valores de ω^2 y de esta forma encontrar $\vec{v}$.