Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de física
FI2001 – Mecánica

Auxiliar 12

Pequeñas ocilaciones

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

P1.-

Considere un alambre que describe una curva parabólica del tipo $y = ax^2$ en un plano vertical. Un anillo de masa m desliza con roce despreciable por el alambre, unido a un resorte de largo l_0 y constante elástica k. El otro extremo del resorte se encuentra atado a un punto fijo localizado a una distancia D del punto $(0, 0)$ del sistema de coordenadas (x, y). Asuma $a = 1/l_0$ y $D = 2l_0$. A partir de esto se pide:

(a) Si el anillo se encuentra inicialmente en el punto más bajo de la parábola, determine la velocidad v_0 con que se le debe impulsar para que alcance una altura D sobre la posición inicial.

(b) Demuestre que el punto $(0, 0)$ es un punto de equilibrio estable.

(c) Determine el periodo de las pequeñas oscilaciones del anillo alrededor del punto de equilibrio.

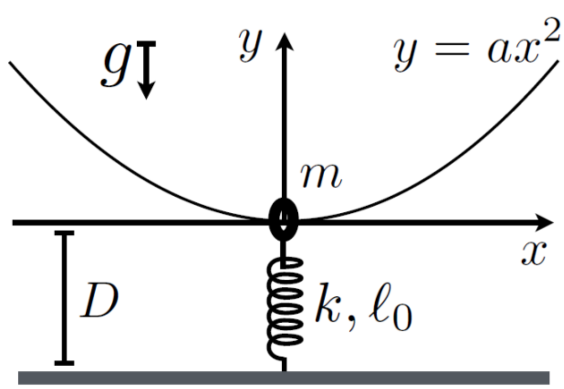


Figura 1: Pregunta 1

$\boxed{\textbf{P2.-}}$

Una partícula de masa m se desplaza sin roce por el interior de un tubo colocado en forma horizontal, bajo la acción de una fuerza conservativa cuyo potencial asociado está dado por la expresión siguiente:

$$U(x) = \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x}$$

donde A y B son constantes positivas.

(a) Determine las unidades de A y B.

(b) Determine la aceleración de la partícula cuando éste está en una posición arbitraria x.

(c) Si existe algún punto de equilibrio estable x_0, determine el periodo de pequeñas oscilaciones que experimenta la partícula cuando se libera desde el reposo en un punto muy cercano a x_0.

(d) Si la partícula se libera desde la posición $x = x_0/2$ en reposo, determine su rapidez cuando pasa por la posición x_0.

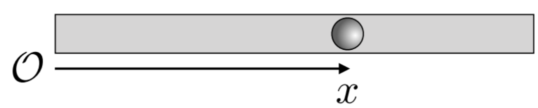


Figura 2: Pregunta 2

Formulario

Puntos de equilibrio

Si sobre una partícula de masa m actúan solo fuerzas conservativas (o que las no conservativas no ejerzan trabajo), los **puntos de equilibrio** r_0 son los puntos en que la partícula puede permanecer en reposo y se pueden identificar mediante

$$\left.\frac{\partial U(r)}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0 \qquad \text{con} \qquad U(r) = \sum_i U_i(r)$$

donde dependiendo de si maximizan o minimizan el potencial, pueden ser puntos de equilibrio **estables** o **inestables**:

$$\left.\frac{\partial^2 U(r)}{\partial r^2}\right|_{r=r_0} > 0 \quad \text{(estable)} \qquad\qquad \left.\frac{\partial^2 U(r)}{\partial r^2}\right|_{r=r_0} < 0 \quad \text{(inestable)}$$

Pequeñas oscilaciones en una dimensión

La **serie de Taylor** de una función f infinitamente diferenciable en torno de un valor a es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right|_{x=a} (x-a)^n$$

Expandiendo el potencial $U(x)$ (que depende de una sola variable x) en torno a un punto de equilibrio estable x_e en serie de Taylor

$$U(x) = U(x_e) + \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x_e} (x - x_e) + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_e} (x - x_e)^2 + \cdots$$

Por definición de punto de eq. estable, $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x_e} = 0$, y considerando pequeñas oscilaciones, se desprecian los términos $n > 2$ (pues $(x - x_e)^n$ es muy pequeño), quedando

$$U(x) = U(x_e) + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_e} (x - x_e)^2$$

Así, la segunda ley de Newton queda

$$m\ddot{x} = F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

donde

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_e} (x - x_e)$$

y defininedo $\delta x = x - x_e$ ($\Rightarrow \ddot{\delta x} = \ddot{x}$), se obtiene

$$\ddot{\delta x} + \frac{1}{m} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_e} \delta x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\delta x} + \omega_o^2 \delta x = 0$$

que es la ecuación de un oscilador armónico simple con **frecuencia de oscilación**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_e}}$$

Aux 12 : Pequeñas oscilaciones

P1

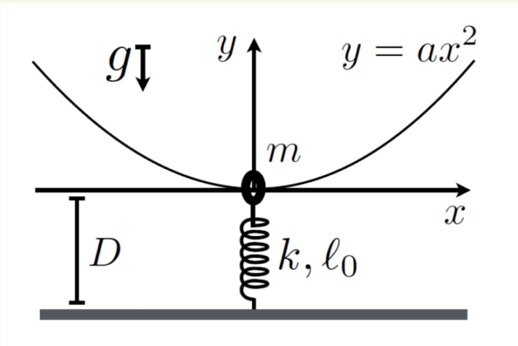
Considere un alambre que describe una curva parabólica del tipo $y = ax^2$ en un plano vertical. Un anillo de masa m desliza con roce despreciable por el alambre, unido a un resorte de largo l_0 y constante elástica k. El otro extremo del resorte se encuentra atado a un punto fijo localizado a una distancia D del punto $(0,0)$ del sistema de coordenadas (x,y). Asuma $a = 1/l_0$ y $D = 2l_0$. A partir de esto se pide:

(a) Si el anillo se encuentra inicialmente en el punto más bajo de la parábola, determine la velocidad v_0 con que se le debe impulsar para que alcance una altura D sobre la posición inicial.

(b) Demuestre que el punto $(0,0)$ es un punto de equilibrio estable.

(c) Determine el periodo de las pequeñas oscilaciones del anillo alrededor del punto de equilibrio.

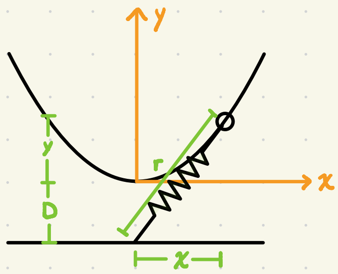
a) Como no hay roce y la normal es $\perp$ a la trayectoria, no hace trabajo. Así, sólo existen fuerzas conservativas y ocurre conservación de energía.



$$E = K + U = K + U_g + U_e$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{k}{2}(r - l_0)^2$$

donde r es el largo del resorte en cierto instante



$$r = \sqrt{x^2 + (y+D)^2}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{k}{2}\left(\sqrt{x^2+(y+D)^2} - l_0\right)^2$$

Reemplazamos $y = ax^2$, $a = \frac{1}{l_0}$ y $D = 2l_0$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mg\frac{1}{l_0}x^2 + \frac{k}{2}\left(\sqrt{x^2 + (\frac{1}{l_0}x^2 + 2l_0)^2} - l_0\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + mg\frac{1}{l_0}x^2 + \frac{k}{2}\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{l_0^2}x^4 + 4x^2 + 4l_0^2} - l_0\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + mg\frac{1}{l_0}x^2 + \frac{k}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{l_0^2}x^4 + 5x^2 + 4l_0^2} - l_0\right)^2$$

* Notar que a pesar de que el enunciado dice "coordenadas (x,y)", pero sabemos que y está en función de x, así que en verdad el sistema tiene un solo grado de libertad (se puede describir con una sola variable) y "coordenadas (x, y)" es "variable x".

Ahora podemos evaluarlos en el inicio y en el final

i) Inicialmente, $v_i = v_0$, $x_i = 0$

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{k}{2}\left(\sqrt{4l_0^2} - l_0\right)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{k}{2}l_0^2$$

f] Para el final, imponemos $v_f = 0$ e $y_f = D = a x_f^2 = \frac{1}{l_0} x_f^2 \Rightarrow x_f^2 = D l_0 = 2 l_0^2$

$D = 2l_0$

$$E_f = mg \cancel{\tfrac{1}{l_0}}\, 2 l_0^{\cancel{2}} + \frac{k}{2}\left(\sqrt{\cancel{\tfrac{1}{l_0^2}}\, 4 l_0^{\cancel{4}\,2} + 5\cdot 2 l_0^2 + 4 l_0^2} - l_0\right)^2$$

$$= 2mgl_0 + \frac{k}{2}\left(l_0\sqrt{18} - l_0\right)^2$$

$$= 2mgl_0 + \tfrac{1}{2} k l_0^2 (3\sqrt{2} - 1)^2$$

Aplicamos conservación de energía $E_i = E_f$

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 + \frac{k}{2} l_0^2 = 2mgl_0 + \tfrac{1}{2} k l_0^2 (3\sqrt{2}-1)^2$$

$$\Rightarrow v_0^2 = \frac{2}{m}\left[2mgl_0 + \tfrac{1}{2} k l_0^2 (3\sqrt{2}-1)^2 - \frac{k}{2} l_0^2\right]$$

$$= 4gl_0 + \frac{1}{m} k l_0^2 \left[(3\sqrt{2}-1)^2 - 1\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{4gl_0 + \frac{1}{m} k l_0^2\left[(3\sqrt{2}-1)^2-1\right]}}$$

b) Para ver si un punto es un punto de equilibrio estable, veamos primero si es punto de equilibrio y posteriormente si es es estable.

El potencial está dado por

⚠ Para $\left.\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right|_{x_0}$ es PRIMERO derivar y DEPUÉS evaluar en x_0, NO al revés.

$$U(x) = mg\frac{1}{l_0} x^2 + \frac{k}{2}\left(\sqrt{\tfrac{1}{l_0^2} x^4 + 5x^2 + 4l_0^2} - l_0\right)^2$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = \left[mg\frac{1}{l_0} 2x + \cancel{\frac{k}{2}}\cdot\cancel{2}\left(\sqrt{\tfrac{1}{l_0^2}x^4 + 5x^2 + 4l_0^2} - l_0\right)\frac{\overbrace{\cancel{4}^{2}\tfrac{1}{l_0^2}x^3 + \cancel{10}^{5} x}^{0 \text{ si } x=0}}{\cancel{2}\sqrt{\tfrac{1}{l_0^2}x^4 + 5x^2 + 4l_0^2}}\right]_{x=0} = 0$$

como $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, $x=0$ es un punto de equilibrio.

Ahora la segunda derivada

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left[2\frac{mg}{l_0} + k\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\sqrt{\tfrac{1}{l_0^2}x^4 + 5x^2 + 4l_0^2} - l_0\right)\frac{2\frac{1}{l_0^2}x^3 + 5x}{\sqrt{\tfrac{1}{l_0^2}x^4 + 5x^2 + 4l_0^2}}\right)\right]_{x=0}$$

$(fg)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$$= \Bigg[2\frac{mg}{l_0} + k\Bigg\{\frac{\overbrace{4\frac{1}{l_0^2}x^3 + 10x}^{0 \text{ si } x=0}}{2\sqrt{\frac{1}{l_0^2}x^4 + 5x^2 + 4l_0^2}}\cdot\frac{2\frac{1}{l_0^2}x^3 + 5x}{\sqrt{\frac{1}{l_0^2}x^4 + 5x^2 + 4l_0^2}}$$

$$+ \underbrace{\frac{\overbrace{\left(6\frac{1}{l_0^2}x^2 + 5\right)}^{5}\overbrace{\sqrt{\frac{1}{l_0^2}x^4 + 5x^2 + 4l_0^2}}^{2l_0} - \overbrace{\left(2\frac{1}{l_0^2}x^3 + 5x\right)}^{0}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{l_0^2}x^4 + 5x^2 + 4l_0^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(4\frac{1}{l_0^2}x^3 + 10x\right)}{\frac{1}{l_0^2}x^4 + 5x^2 + 4l_0}}_{\text{Todo esto da } \frac{5\cdot 2l_0}{4l_0} = \frac{5}{2} \text{ si } x=0}\Bigg\}\Bigg]_{x=0}$$

$$= 2\frac{mg}{l_0} + \frac{5}{2}k > 0$$

como $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=0} > 0$, significa que el potencial U es convexa en $x=0$, o bien, $x=0$ es punto de equilibrio estable.

c) Por 2da ec. de Newton

$$m\ddot{x} = F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad (\star)$$

$$\vec{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\Rightarrow F_x = \vec{F}\cdot\hat{\imath} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\hat{\imath} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

hacemos expansión de Taylor hasta orden 2 en torno a $x=0$

$$U(x) = U(0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=0}(x-0)^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{U(0)}_{cte} + \underbrace{\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=0}}_{cte}(x-0)\right) = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=0}(x-0) = \left(2\frac{mg}{\ell_0} + \frac{5}{2}k\right)x$$

reemplazando en $(\star)$

$$m\ddot{x} = -\left(2\frac{mg}{\ell_0} + \frac{5}{2}k\right)x \iff \ddot{x} + \left(2\frac{g}{\ell_0} + \frac{5}{2}\frac{k}{m}\right)x = 0$$

definiendo $\delta x = x - 0 \Rightarrow x = \delta x$ y $\ddot{x} = \delta\ddot{x}$

→ Está medio XD este paso, porque tiene más gracia cuando el pto. de eq. estable sea $\neq 0$.

$$\delta\ddot{x} + \left(2\frac{g}{\ell_0} + \frac{5}{2}\frac{k}{m}\right)\delta x = 0$$

es un oscilador armónico simple! con frecuencia

$$\omega_0 = \sqrt{2\frac{g}{\ell_0} + \frac{5}{2}\frac{k}{m}}$$

y su periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\left(2\frac{g}{\ell_0} + \frac{5}{2}\frac{k}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

P2

Una partícula de masa m se desplaza sin roce por el interior de un tubo colocado en forma horizontal, bajo la acción de una fuerza conservativa cuyo potencial asociado está dado por la expresión siguiente:

$$U(x) = \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x}$$

donde A y B son constantes positivas.

(a) Determine las unidades de A y B.

(b) Determine la aceleración de la partícula cuando éste está en una posición arbitraria x.

(c) Si existe algún punto de equilibrio estable x_0, determine el periodo de pequeñas oscilaciones que experimenta la partícula cuando se libera desde el reposo en un punto muy cercano a x_0.

(d) Si la partícula se libera desde la posición $x = x_0/2$ en reposo, determine su rapidez cuando pasa por la posición x_0.

a) El potencial tiene unidades de energía $\left[kg\cdot\frac{m^2}{s^2}\right]$, luego, necesariamente $\frac{A}{x^2}$ y $\frac{B}{x}$ tienen las mismas unidades

$$\frac{[A]}{[m^2]} = \left[kg\cdot\frac{m^2}{s^2}\right] \Rightarrow [A] = \left[kg\cdot\frac{m^4}{s^2}\right] \qquad \frac{[B]}{[m]} = \left[kg\cdot\frac{m^2}{s^2}\right] \Rightarrow [B] = \left[kg\,\frac{m^3}{s^2}\right]$$

b) La fueza asociada al potencial es

$$\vec{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \cancel{\frac{\partial U}{\partial y}}^{0}\hat{\jmath} + \cancel{\frac{\partial U}{\partial z}}^{0}\hat{k}\right) \qquad (\text{U sólo depende de } x)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A}{x^2} - \frac{B}{x}\right)\hat{\imath}$$

$$= -\left(-\frac{2A}{x^3} + \frac{B}{x^2}\right)\hat{\imath}$$

$$= \left(\frac{2A}{x^3} - \frac{B}{x^2}\right)\hat{\imath}$$

Como $\vec{F} = m\vec{a}$

$$\Rightarrow m\vec{a} = \left(\frac{2A}{x^3} - \frac{B}{x^2}\right)\hat{\imath} \qquad \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{1}{m}\left(\frac{2A}{x^3} - \frac{B}{x^2}\right)\hat{\imath}}$$

c) El pto. de eq. estable x_0 se obtiene cuando $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x_0} = 0 \wedge \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_0} > 0$,

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x_0} = \left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A}{x^2} - \frac{B}{x}\right)\right|_{x_0} = \left.-\frac{2A}{x^3} + \frac{B}{x^2}\right|_{x_0} \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{x_0^2}\left(-\frac{2A}{x_0} + B\right) = 0 \qquad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{2A}{B}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_0} = \left.\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2A}{x^3} + \frac{B}{x^2}\right)\right|_{x_0} = \left.\left(\frac{6A}{x^4} - \frac{2B}{x^3}\right)\right|_{x=\frac{2A}{B}} = \cancel{6}^{3}\cancel{A}\cdot\frac{B^4}{\cancel{16}_{8}\cancel{A^4}^{3}} - 2B\frac{B^3}{8A^3} = \frac{3B^4}{8A^3} - \frac{2B^4}{8A^3} = \frac{B^4}{8A^3} > 0$$

por lo tanto, $x_0 = \frac{2A}{B}$ es un pto. de eq. estable.

* Esto es equivalente a imponer que $\ddot{x} = 0$ y podriamos haber usado lo calculado en b)

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x_0} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -F_x\big|_{x_0} = -m\ddot{x} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{x} = 0$$

Ahora, haciendo expansión de Taylor de U en torno a x_0 (hasta el orden 2)

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_0}(x - x_0)^2$$

$$= \left(A\frac{B^2}{4A^2} - B\frac{B}{2A}\right) + \frac{1}{2}\frac{B^4}{8A^3}\left(x - \frac{2A}{B}\right)^2$$

reemplazando en la 2da ley de Newton para el componente x

$$\underline{m\ddot{x}} = F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \underline{-\frac{1}{\cancel{2}}\frac{B^4}{8A^3}\cancel{2}\left(x - \frac{2A}{B}\right)}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{1}{m}\frac{B^4}{8A^3}\left(x - \frac{2A}{B}\right)$$

definimos $\delta x = x - \frac{2A}{B}$ $\quad (\delta\ddot{x} = \ddot{x})$

$$\Rightarrow \delta\ddot{x} + \underbrace{\frac{1}{m}\frac{B^4}{8A^3}}_{\omega_0^2}\delta x = 0 \qquad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{B^4}{8A^3}} \qquad (\text{frecuencia})$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{m\frac{8A^3}{B^4}}}$$

d) Como sólo se presenta una fuerza conservativa, hay conservación de energía

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x}$$

Para condición inicial, la partícula parte del reposo y $\frac{x_0}{2} = \frac{2A}{B}\frac{1}{2} = \frac{A}{B}$

$$E_i = \frac{1}{2}m\cancel{v_0^2}^{\,0} + \frac{A}{(A/B)^2} - \frac{B}{A/B} = \frac{B^2}{A} - \frac{B^2}{A} = 0$$

mientras que para condición final

$$E_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{A}{(2A/B)^2} - \frac{B}{2A/B} = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{B^2}{4A} - \frac{B^2}{2A}$$

imponiendo $E_i = E_f$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{B^2}{4A} - \frac{B^2}{2A} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_f^2 = \frac{2}{m}\frac{B^2}{A}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{4}\frac{1}{m}\frac{B^2}{A}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_f = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{B^2}{2A}}}$$