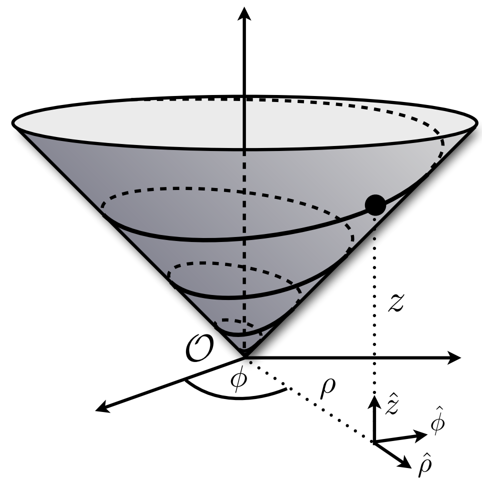
FI-2001 Mecánica - Sección-4
Prof. Gonzalo A. Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi y Danilo Tapia
FCFM, Universidad de Chile

Control 1
Miércoles 9 de Abril, 2025
Tiempo: 3horas



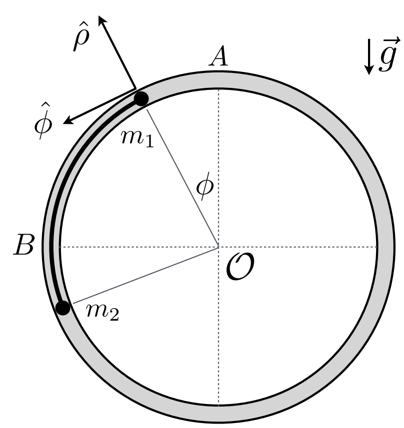
P1: Una partícula P se mueve a lo largo de una trayectoria que, en coordenadas cilíndricas, está determinada por las siguientes relaciones

$$z(t) = \rho(t), \qquad dz/d\phi = R, \qquad \phi = \omega_0 t.$$

La trayectoria de la partícula se encuentra sobre una superficie cónica, como se ilustra en la figura. En $t = 0$ se cumple $z = 0$.

(a) 3pts. Usando coordenadas cilíndricas, escriba los vectores posición y velocidad para un tiempo cualquiera, y calcule la velocidad angular $\vec{\omega}_{\mathcal{O}}$ de la partícula con respecto al origen del sistema.

(b) 3pts. Obtenga una expresión para el radio de curvatura ρ_c como función del ángulo ϕ, y evalúe su resultado en el caso particular $\phi = 0$. Podría serle útil notar que $16 + 18\phi^2 + 7\phi^4 + \phi^6 = (8 + 5\phi^2 + \phi^4)(2 + \phi^2)$.



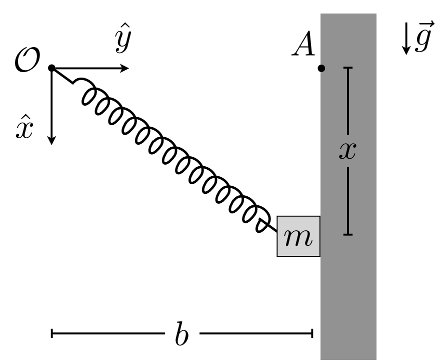
P2: Dos masas m_1 y m_2, unidas por una cuerda ideal de largo $\pi R/2$, pueden desplazarse (sin roce) entre dos casquetes cilíndricos manteniendo a ambas masas a una distancia R del origen (ver figura). En $t = 0$ las masas se liberan del reposo desde la configuración $\phi = 0$ (es decir m_1 y m_2 se liberan desde las posiciones A y B).

(a) 2pts. Escriba las posiciones $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ de las partículas en términos de la base $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ indicados en la figura. A partir de estas expresiones, deduzca las aceleraciones $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$. (Recuerde que $\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \dot{\phi}\hat{\phi}$ y $\frac{d}{dt}\hat{\phi} = -\dot{\phi}\hat{\rho}$).

(b) 1.5pts. Identifique todas las fuerzas actuando sobre cada partícula, y escríbalas en términos de la base $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ indicados en la figura.

(c) 2pts. A partir de la la segunda ley de Newton deduzca la ecuación de movimiento para ϕ. Integre la ecuación una vez para obtener una relación del tipo $\dot{\phi}$ en función de ϕ.

(d) 0.5pts. Para qué ángulo ϕ la cuerda pierde su tensión?



P3: Una masa m desliza por una pared vertical empujada por un resorte de constante elástica k. El otro extremo está fijo en el punto $\mathcal{O}$, tal como lo muestra la figura. La distancia entre $\mathcal{O}$ y la pared es b (distancia $\mathcal{O}A$) y el largo natural del resorte es $\ell_0 = 2b$. Entre la masa y la pared existe roce estático (caracterizado por el coeficiente μ_e), pero no roce cinético.

(a) 2pts. ¿Qué condición debe cumplir μ_e tal que, al dejar la partícula en reposo en el punto A, ésta comience a descender?

(b) 2pts. Si μ_e cumple la condición de (a) y la partícula es liberada desde el reposo en el punto A, determine la magnitud de la normal que la pared ejerce sobre la partícula en función de la distancia x de la masa al punto A (ver figura).

(c) 2pts. ¿Qué rapidez tiene la masa cuando se separa de la pared? (Recuerde que $\frac{d}{dx}\sqrt{A^2 + x^2} = \frac{x}{\sqrt{A^2+x^2}}$).

Control 1

P1

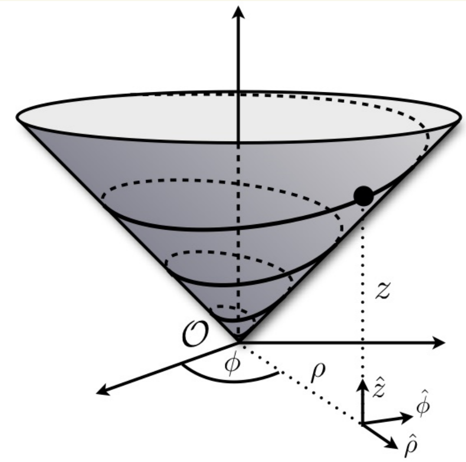
P1: Una partícula P se mueve a lo largo de una trayectoria que, en coordenadas cilíndricas, está determinada por las siguientes relaciones

$$z(t) = \rho(t), \qquad dz/d\phi = R, \qquad \phi = \omega_0 t.$$

La trayectoria de la partícula se encuentra sobre una superficie cónica, como se ilustra en la figura. En $t = 0$ se cumple $z = 0$.

(a) 3pts. Usando coordenadas cilíndricas, escriba los vectores posición y velocidad para un tiempo cualquiera, y calcule la velocidad angular $\vec{\omega}_{\mathcal{O}}$ de la partícula con respecto al origen del sistema.

(b) 3pts. Obtenga una expresión para el radio de curvatura ρ_c como función del ángulo ϕ. Podría serle útil notar que $16 + 18\phi^2 + 7\phi^4 + \phi^6 = (8 + 5\phi^2 + \phi^4)(2 + \phi^2)$.



a) Tenemos que la posición en cilíndricas

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$$

en este caso, como $\rho = z$ y $\frac{dz}{d\phi} = R$, así

$$\rho = z = R\phi$$

luego

$$\vec{r} = R\phi\hat{\rho} + R\phi\hat{k} = R\phi(\hat{\rho} + \hat{k})$$

con $\phi = \omega_0 t$.

Derivamos para obtener la velocidad

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left[R\phi(\hat{\rho} + \hat{k})\right]$$

$$= R\dot{\phi}(\hat{\rho} + \hat{k}) + R\phi\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$= R\dot{\phi}(\hat{\rho} + \phi\hat{\phi} + \hat{k})$$

como $\phi = \omega_0 t \Rightarrow \dot{\phi} = \omega_0$

$$\vec{v} = R\omega_0(\hat{\rho} + \phi\hat{\phi} + \hat{k})$$

Luego, la velocidad angular es $\vec{\omega}_0 = \frac{\vec{r}\times\vec{v}}{\|\vec{r}\|^2}$,

calculando por separado,

$$\|\vec{r}\|^2 = R^2\phi^2 + R^2\phi^2 = 2R^2\phi^2$$

Siguiendo...

$$\vec{r}\times\vec{v} = R\phi(\hat{\rho} + \hat{k}) \times R\omega_0(\hat{\rho} + \phi\hat{\phi} + \hat{k})$$

$$= R^2\phi\omega_0(\phi\hat{k} - \cancel{\hat{\phi}} + \cancel{\hat{\phi}} - \phi\hat{\rho})$$

$$= R^2\phi^2\omega_0(\hat{k} - \hat{\rho})$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_0 = \frac{\vec{r}\times\vec{v}}{\|\vec{r}\|^2} = \frac{\cancel{R^2\phi^2}\omega_0(\hat{k} - \hat{\rho})}{2\cancel{R^2\phi^2}} = \frac{\omega_0}{2}(\hat{k} - \hat{\rho})$$

b) Para ρ_c, usamos que $\rho_c = \frac{v}{\omega_{\hat{t}}}$ con $\omega_{\hat{t}} = \left\|\frac{d\hat{t}}{dt}\right\|$

Partiendo con $\hat{t}$,

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\cancel{R\omega_0}(\hat{\rho} + \phi\hat{\phi} + \hat{k})}{\sqrt{\cancel{R^2\omega_0^2}(1 + \phi^2 + 1)}} = \frac{\hat{\rho} + \phi\hat{\phi} + \hat{k}}{\sqrt{2 + \phi^2}}$$

recordando que $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ y $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{(\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{\phi}\hat{\phi} - \phi\dot{\phi}\hat{\rho})\sqrt{2 + \phi^2} - (\hat{\rho} + \phi\hat{\phi} + \hat{k})\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2 + \phi^2}}\cancel{2}\phi\dot{\phi}}{2 + \phi^2}$$

$$= \frac{(2\dot{\phi}\hat{\phi} - \phi\dot{\phi}\hat{\rho})(2 + \phi^2) - (\hat{\rho} + \phi\hat{\phi} + \hat{k})\phi\dot{\phi}}{(2 + \phi^2)\sqrt{2 + \phi^2}}$$

$$= \frac{\dot{\phi}(2\hat{\phi} - \phi\hat{\rho})(2 + \phi^2) - \dot{\phi}(\phi\hat{\rho} + \phi^2\hat{\phi} + \phi\hat{k})}{(2 + \phi^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\dot{\phi}(4\hat{\phi} + 2\phi^2\hat{\phi} - 2\phi\hat{\rho} - \phi^3\hat{\rho} - \phi\hat{\rho} - \phi^2\hat{\phi} - \phi\hat{k})}{(2 + \phi^2)^{3/2}}$$

Made with Goodnotes

Seguimos ...

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{\dot{\phi}\left(4\hat{\phi} + 2\phi^2\hat{\phi} - 2\phi\hat{\rho} - \phi^3\hat{\rho} - \phi\hat{\rho} - \phi^2\hat{\phi} - \phi\hat{k}\right)}{(2+\phi^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\dot{\phi}\left[-\phi(2+\phi^2+1)\hat{\rho} + (4+2\phi^2-\phi^2)\hat{\phi} - \phi\hat{k}\right]}{(2+\phi^2)^{3/2}}$$

$\dot{\phi} = \omega_0$

$$= \frac{\omega_0\left[-\phi(3+\phi^2)\hat{\rho} + (4+\phi^2)\hat{\phi} - \phi\hat{k}\right]}{(2+\phi^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \omega_{\hat{t}} = \left\|\frac{d\hat{t}}{dt}\right\| = \frac{\omega_0}{(2+\phi^2)^{3/2}}\left\|-\phi(3+\phi^2)\hat{\rho} + (4+\phi^2)\hat{\phi} - \phi\hat{k}\right\|$$

$$= \frac{\omega_0}{(2+\phi^2)^{3/2}}\sqrt{\phi^2(3+\phi^2)^2 + (4+\phi^2)^2 + \phi^2}$$

$$= \frac{\omega_0}{(2+\phi^2)^{3/2}}\sqrt{\phi^2(9+6\phi^2+\phi^4) + (16+8\phi^2+\phi^4) + \phi^2}$$

$$= \frac{\omega_0}{(2+\phi^2)^{3/2}}\sqrt{9\phi^2 + 6\phi^4 + \phi^6 + 16 + 8\phi^2 + \phi^4 + \phi^2}$$

$$= \frac{\omega_0}{(2+\phi^2)^{3/2}}\sqrt{16 + 18\phi^2 + 7\phi^4 + \phi^6}$$

usamos lo que dice en el enunciado

$$16 + 18\phi^2 + 7\phi^4 + \phi^6 = (8+5\phi^2+\phi^4)(2+\phi^2)$$

$$\Rightarrow \omega_{\hat{t}} = \frac{\omega_0}{(2+\phi^2)^{3/2}}\sqrt{(8+5\phi^2+\phi^4)(2+\phi^2)}$$

$$= \frac{\omega_0\sqrt{8+5\phi^2+\phi^4}}{(2+\phi^2)}$$

Finalmente

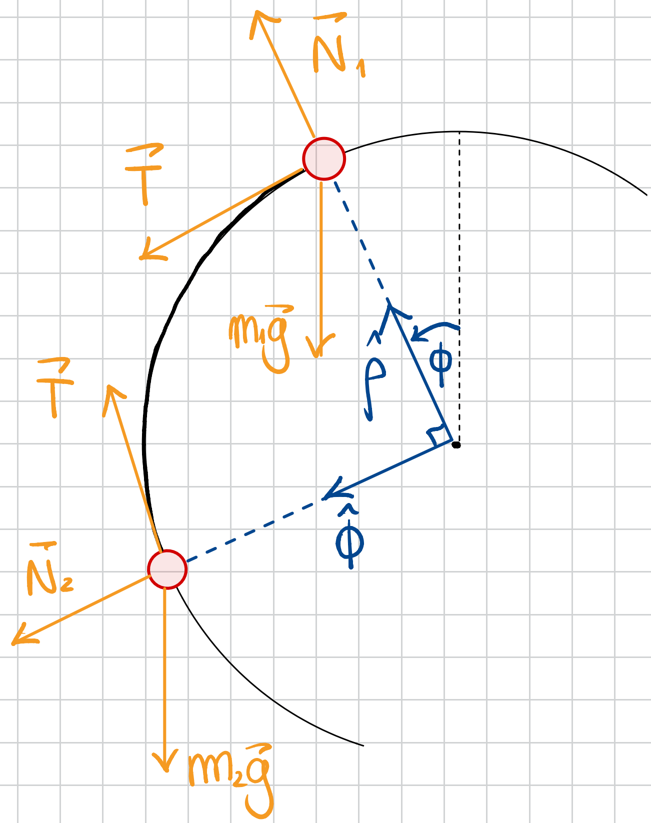
$$\rho_c = \frac{v}{\omega_{\hat{t}}} = R\cancel{\omega_0}\sqrt{2+\phi^2}\,\frac{(2+\phi^2)}{\cancel{\omega_0}\sqrt{8+5\phi^2+\phi^4}}$$

$$\boxed{\rho_c = \frac{R(2+\phi^2)^{3/2}}{\sqrt{8+5\phi^2+\phi^4}}}$$

Reemplazando en $\phi = 0$

$$\rho_c = \frac{R\,\cancel{2^{3/2}}}{\cancel{\sqrt{8}}} = R$$

P2



a) Ocupando el sistema $\{\hat{\rho}, \hat{\phi}\}$, y considerando que el largo de la cuerda es $L = R(\pi/2)$, entonces

$$\vec{r}_1 = R\hat{\rho} \quad y \quad \vec{r}_2 = R\hat{\phi}$$

Derivamos

$$\vec{v}_1 = \frac{d}{dt}\vec{r}_1 = R\dot{\phi}\hat{\phi} \Rightarrow \vec{a}_1 = \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -R\dot{\phi}^2\hat{\rho} + R\ddot{\phi}\hat{\phi}$$

y para m_2

$$\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = -R\dot{\phi}\hat{\rho} \Rightarrow \vec{a}_2 = \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -R\ddot{\phi}\hat{\rho} - R\dot{\phi}^2\hat{\phi}$$

b) Las fuerzas sobre m_1 son:

- ▷ Normal: $\vec{N}_1 = N_1\hat{\rho}$
- ▷ Tensión: $\vec{T} = T\hat{\phi}$, con $T \equiv \|\vec{T}\| \geq 0$
- ▷ Peso: $m_1\vec{g} = -m_1 g\cos\phi\,\hat{\rho} + mg\sin\phi\,\hat{\phi}$

mientras que para m_2 son:

- ▷ Normal: $\vec{N}_2 = N_2\hat{\phi}$
- ▷ Tensión: $\vec{T} = T\hat{\rho}$, con $T \equiv \|\vec{T}\| > 0$
- ▷ Peso: $m_2\vec{g} = -m_2 g\cos\phi\,\hat{\rho} + m_2 g\sin\phi\,\hat{\phi}$

c) Hacemos Newton para cada partícula por separado. Primero para m_1

$$m_1\vec{a}_1 = \sum_i \vec{F}_{i,1} \Leftrightarrow -m_1R\dot{\phi}^2\hat{\rho} + m_1R\ddot{\phi}\hat{\phi} = N_1\hat{\rho} + T\hat{\phi} - m_1 g\cos\phi\,\hat{\rho} + m_1 g\sin\phi\,\hat{\phi}$$

donde sus EoMs escalares serían

$$\hat{\rho})\ -m_1R\dot{\phi}^2 = N_1 - m_1 g\cos\phi \qquad \hat{\phi})\ m_1R\ddot{\phi} = T + m_1 g\sin\phi \quad (1)$$

Mientras que para m_2

$$m_2\vec{a}_2 = \sum_i \vec{F}_{i,2} \Leftrightarrow -m_2R\ddot{\phi}\hat{\rho} - m_2R\dot{\phi}^2\hat{\phi} = N_2\hat{\phi} + T\hat{\rho} - m_2 g\cos\phi\,\hat{\rho} + m_2 g\sin\phi\,\hat{\phi}$$

de donde obtenemos los EoMs escalares

$$\hat{\rho})\ -m_2 R\ddot{\phi} = T - m_2 g\cos\phi \quad (2) \qquad \hat{\phi})\ -m_2 R\dot{\phi}^2 = N_2 + m_2 g\sin\phi$$

Notamos que de (1) y (2) podemos despejar la tensión

$$m_1 R\ddot{\phi} - m_1 g\sin\phi = -m_2 R\ddot{\phi} + m_2 g\cos\phi$$

$$\Leftrightarrow R(m_1+m_2)\ddot{\phi} = m_1 g\sin\phi + m_2 g\cos\phi \quad (3)$$

que podemos integrar con truco de mecánica (o multiplicando por $\dot{\phi}$ e integrando c/r al tiempo)

$$R(m_1+m_2)\dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = m_1 g\sin\phi + m_2 g\cos\phi \quad \Big/ \int_0^{\phi} d\phi$$

$$\Rightarrow R(m_1+m_2)\int_0^{\dot{\phi}(\phi)} \dot{\phi}\, d\dot{\phi} = m_1 g\int_0^{\phi}\sin\phi\, d\phi + m_2 g\int_0^{\phi}\cos\phi\, d\phi$$

$$\Leftrightarrow R(m_1+m_2)\frac{\dot{\phi}^2}{2} = -m_1 g(\cos\phi - 1) + m_2 g\sin\phi$$

d) Reemplazamos (3) en (1) para obtener $T=T(\phi)$,

$$T(\phi) = \frac{m_1}{m_1+m_2}(m_1 g\sin\phi + m_2 g\cos\phi) - m_1 g\sin\phi$$

$$= \frac{g m_1 m_2}{m_1+m_2}(\cos\phi - \sin\phi)$$

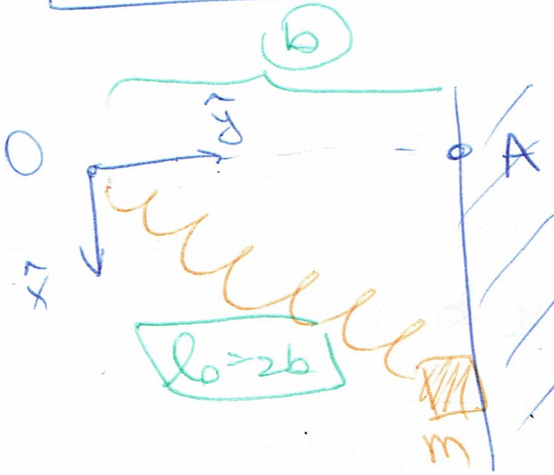
Entonces, se perdería la tensión cuando $T(\phi^*) = 0$, o sea

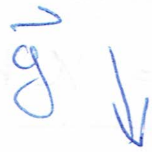
$$\cos\phi^* = \sin\phi^*$$

$$\therefore \phi^* = \frac{\pi}{4}$$

Problema 3

(I)

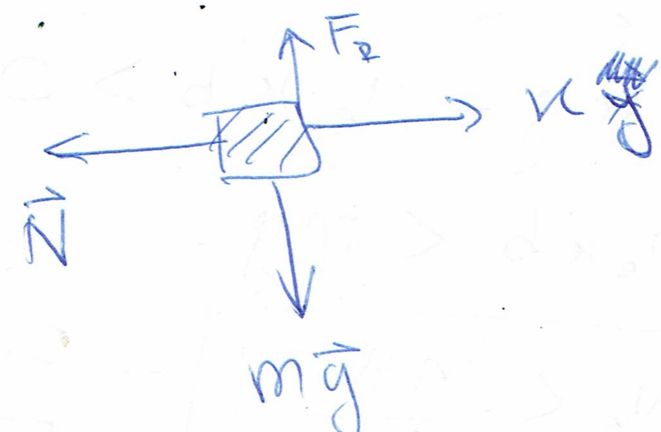




a) μ_e tal que si m está en A ⇒ m desliza.

Tenemos la situación

⇒ DCL



⇒ $\hat{y}$ | $\sum F_y = ky - N$ / y: "estiramiento"

⇒ $y = l_0 - b = 2b - b$

$\boxed{y = b}$

$\hat{x}$ | $\sum F_x = mg - F_R$

$\Rightarrow$ en $\hat{y} \Rightarrow \boxed{\ddot{y} = 0}$

$\Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{N = kb}$

Luego suponemos que está en reposo $\Rightarrow \boxed{F_r = \mu_e N = \mu_e k b}$

$\Rightarrow$ Si es que comienza a deslizar

$\Rightarrow \ddot{x} > 0$

$\Rightarrow$ ¿Qué pasa con μ_e si comienza a deslizar?

$\Rightarrow \sum F_x > 0 \Rightarrow mg - F_r > 0$

$\Rightarrow mg - \mu_e k b > 0$

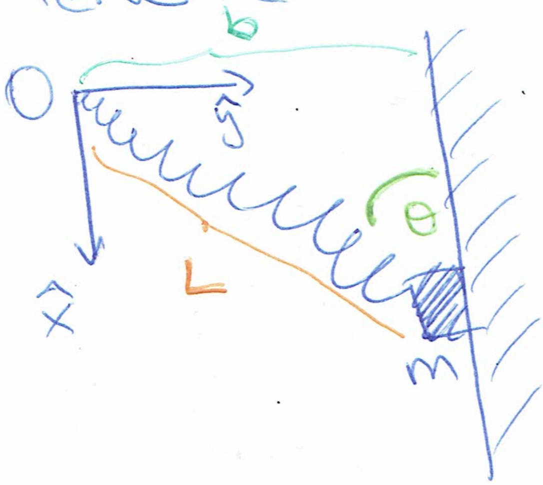
$\Rightarrow \mu_e k b < mg$

$\Rightarrow \boxed{\mu_e < \frac{mg}{kb}}$ $\Rightarrow$ Si el coef. de roce cumple esto entonces m comienza a deslizar.

(b) Si se cumple que

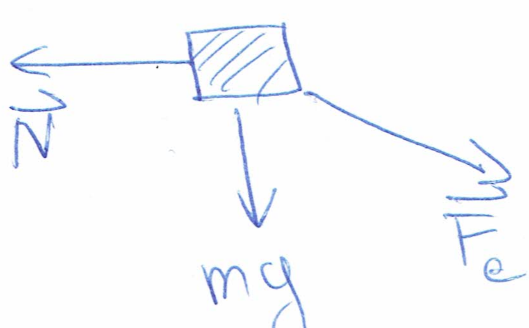
$$\mu_e < \frac{mg}{kb} \Rightarrow$$ La partícula comienza a deslizar.

Tendremos la siguiente situación



nos dicen explícitamente que buscamos ~~to~~ la normal ⇒ el resorte empuja hacia la pared (no existe roce cinético)

Hagamos un DCL

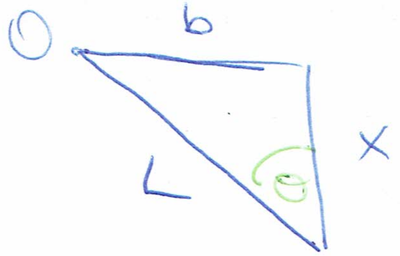


$$\hat{y} \rfloor \sum F_y = F_e \operatorname{sen}\theta - N$$

$$\hat{x} \rfloor \sum F_x = F_e \cos\theta + mg$$

donde F_e: Fuerza elástica

pero tenemos de la figura.



Con L el Largo del resorte

$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{L} \wedge \cos\theta = \dfrac{x}{L}$

donde $L = \sqrt{x^2 + b^2}$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{\sqrt{x^2+b^2}}}$ $\boxed{\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}}$

Entonces tenemos

$\hat{y}\rfloor\ \sum F_y = F_e \dfrac{b}{\sqrt{x^2+b^2}} - N$

$\hat{x}\rfloor\ \sum F_x = F_e \dfrac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} + mg.$

Por último la fuerza elastica es $F_e = k(l_0 - L) = k(2b - \sqrt{x^2+b^2})$

con $L < l_0$ ya que buscamos exista normal $\Rightarrow$ el resorte debe estar comprimido.

$$\Rightarrow \boxed{F_e = k\left(2b - \sqrt{x^2+b^2}\right)}$$

buscamos N tal que $\sum F_y = 0$

$$\Rightarrow N = F_e \frac{b}{\sqrt{x^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow N(x) = \frac{kb\left(2b - \sqrt{x^2+b^2}\right)}{\sqrt{x^2+b^2}}$$

c) De (b) tenemos, con $\sum F_x = m\ddot{x}$,

$$\Rightarrow F_e \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} + mg = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{kx\left(2b - \sqrt{x^2+b^2}\right)}{\sqrt{x^2+b^2}} + mg = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow 2kb \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} - kx + mg = m\ddot{x} \quad / \cdot \dot{x}$$

$$\Rightarrow 2kb \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} \dot{x} - kx\dot{x} + mg\dot{x} = m\dot{x}\ddot{x}$$

haciendo $\int_0^t dt$ tenemos.

$$2kb\int_0^t dt\,\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}\frac{dx}{dt}-k\int_0^t dt\, x\frac{dx}{dt}+$$

$$+mg\underbrace{\int_0^t dt\frac{dx}{dt}}_{x(t)-x(0)}=\frac{m}{2}\int_0^t dt\,\frac{d}{dt}(\dot{x}^2)$$

$= \dot{x}\ddot{x}$

pero nos dicen.

$$\frac{d}{dx}\sqrt{A^2+x^2}=\frac{x}{\sqrt{A^2+x^2}}$$

entonces podemos notar por regla de la cadena

$$\frac{d}{dt}\sqrt{A^2+x^2}=\frac{x}{\sqrt{A^2+x^2}}\frac{dx}{dt}$$

usemos esto en el primer término.

y tenemos

IV

$$\Rightarrow 2kb\int_0^t dt\,\frac{d}{dt}\left(\sqrt{x^2+b^2}\right) - k\int_0^t dt\,\frac{d}{dt}\left(\frac{x^2}{2}\right) +$$

$$+ mg(x - x(0)) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2(t) - \dot{x}^2(0)\right)$$

del enunciado (figura en parte ⓐ) tenemos las condiciones iniciales

$$\boxed{x(0) = 0} \quad \wedge \quad \boxed{\dot{x}(0) = 0}$$

Integrando y aplicando estas condiciones iniciales tenemos

$$\left(2kb\sqrt{x^2+b^2} - 2kb^2\right) - \frac{kx^2}{2} + mgx = \frac{m}{2}\dot{x}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}^2(x) = \frac{4kb\sqrt{x^2+b^2}}{m} - \frac{4kb^2}{m} - \frac{kx^2}{m} + 2gx}$$

nos piden $\dot{x}$ en el momento que se despega. digamos $\boxed{x_D}$

$$\Rightarrow \boxed{x_D = ?} \Rightarrow \text{Despegue} \Rightarrow N = 0$$

pero conocemos $N(x)$ entonces

$$x = x_D \Rightarrow \boxed{N(x_D) = 0}$$

$\Rightarrow$ con el resultado de b

$$0 = \frac{kb\left(2b - \sqrt{x_D^2+b^2}\right)}{\sqrt{x_D^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_D^2+b^2} = 2b \Rightarrow x_D^2+b^2 = 4b^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x_D = \sqrt{3}\,b}$$

Entonces evaluemos $x_D = \sqrt{3}\,b$ en ☆

$$\Rightarrow \underbrace{\dot{x}^2(x_D)}_{\dot{x}_D^2} = \frac{4kb}{m}\sqrt{3b^2+b^2} - \frac{4kb^2}{m} - \frac{3kb^2}{m} + 2\sqrt{3}\,gb$$

$$\dot{x}_D^2 = \frac{8kb^2}{m} - \frac{7kb^2}{m} + 2\sqrt{3}\,gb$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}_D = \sqrt{\frac{kb^2}{m} + 2\sqrt{3}\,gb}}$$

Velocidad en el momento del despegue.