Auxiliar 12

Pequeñas ocilaciones

Profesor: Gonzalo Palma

Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

P1.-

Considere un alambre que describe una curva parabólica del tipo $y = ax^2$ en un plano vertical. Un anillo de masa m desliza con roce despreciable por el alambre, unido a un resorte de largo l_0 y constante elástica k. El otro extremo del resorte se encuentra atado a un punto fijo localizado a una distancia D del punto $(0, 0)$ del sistema de coordenadas (x, y). Asuma $a = 1/l_0$ y $D = 2l_0$. A partir de esto se pide:

(a) Si el anillo se encuentra inicialmente en el punto más bajo de la parábola, determine la velocidad v_0 con que se le debe impulsar para que alcance una altura D sobre la posición inicial.

(b) Demuestre que el punto $(0, 0)$ es un punto de equilibrio estable.

(c) Determine el periodo de las pequeñas oscilaciones del anillo alrededor del punto de equilibrio.

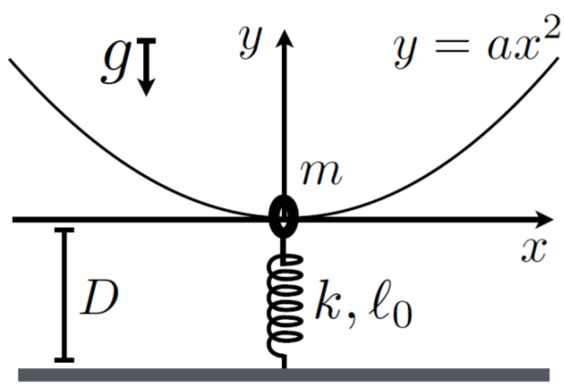

Figura 1: Pregunta 1

P2.-

Una partícula de masa m se desplaza sin roce por el interior de un tubo colocado en forma horizontal, bajo la acción de una fuerza conservativa cuyo potencial asociado está dado por la expresión siguiente:

$$U(x) = \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x}$$

donde A y B son constantes positivas.

(a) Determine las unidades de A y B.

(b) Determine la aceleración de la partícula cuando éste está en una posición arbitraria x.

(c) Si existe algún punto de equilibrio estable x_0, determine el periodo de pequeñas oscilaciones que experimenta la partícula cuando se libera desde el reposo en un punto muy cercano a x_0.

(d) Si la partícula se libera desde la posición $x = x_0/2$ en reposo, determine su rapidez cuando pasa por la posición x_0.

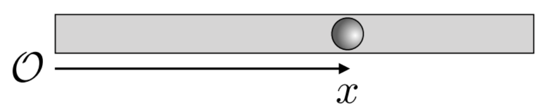

Figura 2: Pregunta 2

Formulario

Puntos de equilibrio

Si sobre una partícula de masa m actúan solo fuerzas conservativas (o que las no conservativas no ejerzan trabajo), los **puntos de equilibrio** r_0 son los puntos en que la partícula puede permanecer en reposo y se pueden identificar mediante

$$\left.\frac{\partial U(r)}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0 \qquad \text{con} \qquad U(r) = \sum_i U_i(r)$$

donde dependiendo de si maximizan o minimizan el potencial, pueden ser puntos de equilibrio **estables** o **inestables**:

$$\left.\frac{\partial^2 U(r)}{\partial r^2}\right|_{r=r_0} > 0 \quad \text{(estable)} \qquad \left.\frac{\partial^2 U(r)}{\partial r^2}\right|_{r=r_0} < 0 \quad \text{(inestable)}$$

Pequeñas oscilaciones en una dimensión

La **serie de Taylor** de una función f infinitamente diferenciable en torno de un valor a es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right|_{x=a} (x-a)^n$$

Expandiendo el potencial $U(x)$ (que depende de una sola variable x) en torno a un punto de equilibrio estable x_e en serie de Taylor

$$U(x) = U(x_e) + \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x_e} (x-x_e) + \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_e} (x-x_e)^2 + \cdots$$

Por definición de punto de eq. estable, $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x_e} = 0$, y considerando pequeñas oscilaciones, se desprecian los términos $n > 2$ (pues $(x-x_e)^n$ es muy pequeño), quedando

$$U(x) = U(x_e) + \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_e} (x-x_e)^2$$

Así, la segunda ley de Newton queda

$$m\ddot{x} = F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

donde

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_e} (x-x_e)$$

y defininedo $\delta x = x - x_e$ ($\Rightarrow \ddot{\delta x} = \ddot{x}$), se obtiene

$$\ddot{\delta x} + \frac{1}{m} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_e} \delta x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\delta x} + \omega_o^2 \delta x = 0$$

que es la ecuación de un oscilador armónico simple con **frecuencia de oscilación**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_e}}$$