Auxiliar 10

Energía II

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

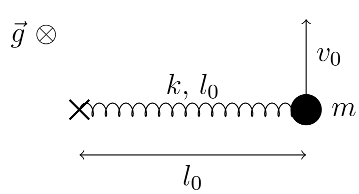
P1.-

Sobre una superficie horizontal **sin roce** una partícula de masa m se mueve ligada a un punto fijo mediante un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0. En el instante mostrado en la figura su velocidad tiene magnitud v_0 y es perpendicular al resorte, el cual se encuentra en su largo natural.

a) ¿Cómo son las fuerzas que afectan la partícula?

b) Determine el valor de v_0 tal que la máxima longitud que el resorte alcance sea $4l_0$.

c) Determine también la máxima y mínima rapidez de la partícula en el movimiento resultante.



P2.- P2 Control 2 2014

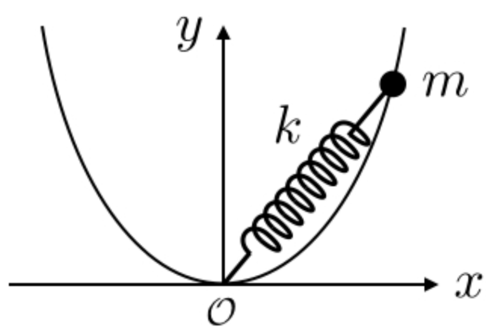
Un anillo de masa m puede deslizar sin roce por un alambre dado por $y = x^2/x_0$ (ver figura). El anillo está unido a un resorte ideal de constante k, largo natural nulo ($l_0 = 0$), y sujeto al punto $\mathcal{O}$. Además de la fuerza del resorte $\vec{F}_R$ y de la fuerza ejercida por el alambre $\vec{F}_A$, sobre el anillo acúa una fuerza externa

$$\vec{F}_E = \frac{k}{x_0}\left(xy\hat{\imath} + \frac{3x_0}{4}y\hat{\jmath}\right) .$$

a) Identifique cuáles de estas fuerzas realizan trabajo. Justifique su respuesta.

b) Encuentre el trabajo total que se realiza sobre el anillo cuando este se mueve desde $x = x_0$ hasta $x = \lambda x_0$ con λ arbitrario

c) Encuentre todos los puntos en que el anillo posee la misma rapidez que la que tiene al pasar por el punto $x = x_0$



Formulario

Energía

La energía mecánica de un sistema de una partícula es igual a la suma de su energía cinética K y potencial U

$$\begin{aligned} E &= K + U \\ &= \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + U\,, \end{aligned}$$

donde $|\vec{v}|$ es la rapidez de la partícula en el sistema de coordenadas que hayan elegido.

Trabajo

El trabajo ejercido por una fuerza se describe como la integral de tal fuerza en la trayectoria de la partícula

$$W_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}\,.$$

El trabajo hecho por **todas las fuerzas no conservativas** nos da la diferencia de energía mecánica

$$E_B - E_A = W^{\mathrm{NC}}_{A\to B}\,.$$

El trabajo realizado por una **fuerza conservativa** $\vec{F}_{\mathrm{C}}$ se puede calcular con

$$W^{\mathrm{C}}_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_{\mathrm{C}}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = U(r_A) - U(r_B)\,,$$

donde U es el potencial asociado a $\vec{F}_C$, donde $\vec{F}_C = -\nabla U$.
Además, el **trabajo total** (considerando tanto fuerzas conservativas como no conservativas) se puede calcular como

$$W^{\mathrm{tot}}_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_{\mathrm{tot}}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = K(r_B) - K(r_A)\,.$$

Conservación de la energía

Las fuerzas conservativas **conservan la energía mecánica**

$$\begin{aligned} E_0 &= E_f \\ \Leftrightarrow K_0 + U_0 &= K_f + U_f\,. \end{aligned}$$

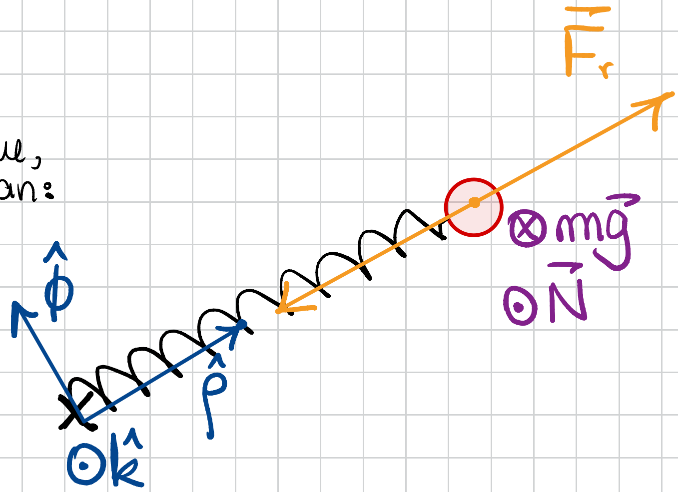
Las fuerzas conservativas más comunes son las fuerzas centrales $\vec{F} = F\hat{r}$. En general, una fuerza es conservativa si su rotor es 0

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = -\nabla U\,.$$

Ojo que una fuerza conservativa **sí** puede ejercer trabajo.

Auxiliar 10

P1



a) Tenemos 3 fuerzas actuando sobre m que, ocupando un sist. de coord. cilíndrico, serían:

- Resorte: $\vec{F}_r = -k(\rho - l_0)\hat{\rho}$
- Peso: $m\vec{g} = -mg\hat{k}$
- Normal: $\vec{N} = N\hat{k}$, con $N \geq 0$

Sabemos que las fuerzas centrales son conservativas, así que F_R es conservativa. También podemos dem. que $\nabla \times (m\vec{g}) = 0 \Rightarrow m\vec{g}$ es conservativa y como $\vec{N}$ no ejerce trabajo podemos ocupar conservación de la energía mecánica

$$E_i = E_f$$

Además, como no hay fuerzas en $\hat{\phi}$, tenemos conservación del momentum angular, o sea

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = 0 \quad (1)$$

b) La única energía potencial que nos interesa es la del resorte, que es

$$U_R = \frac{1}{2}k(\rho - l_0)^2 \quad (2)$$

En el tiempo inicial el resorte está relajado, entonces $U_R(t=0) := U_{R,0} = \frac{1}{2}k(l_0 - l_0)^2 = 0$, pero sí tenemos energía cinética inicial, por lo que la energía mecánica inicial es

$$E_0 = K_0 + U_{R,0} = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (3)$$

La energía final la queremos dejar expresada para una posición/tiempo arbitraria y como estamos ocupando coord. cilíndricas

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \cancelto{=0}{\dot{z}}\hat{k} \Rightarrow |\vec{v}|^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 \quad (4)$$

pero de (1) sabemos que $\rho^2\dot{\phi} = \rho_0^2\dot{\phi}_0$ donde $\rho_0 := \rho(t=0) = l_0$ y $\dot{\phi}_0 := \dot{\phi}(t=0)$, y la velocidad inicial, por el sist. que ocupamos y por info. del enunciado, es

$$\vec{v}(t=0) = \dot{\rho}_0\hat{\rho} + \rho_0\dot{\phi}_0\hat{\phi} = v_0\hat{\phi}$$

$$\therefore \rho_0\dot{\phi}_0 = l_0\dot{\phi}_0 = v_0$$

Juntando esto con conservación del momentum angular tenemos

$$\dot{\phi} = \frac{\rho_0^2 \dot{\phi}_0}{\rho^2} = \frac{l_0 \cdot (l_0 \dot{\phi}_0)}{\rho^2} = \frac{l_0 v_0}{\rho^2}$$

que podemos reemplazar en (4)

$$\Rightarrow |\vec{v}|^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \frac{l_0^2 v_0^2}{\rho^4} = \dot{\rho}^2 + \frac{l_0^2 v_0^2}{\rho^2}$$

así que la energía "final" sería

$$E_f = K_f + U_f = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \frac{l_0^2 v_0^2}{\rho^2} \right) + \frac{1}{2} k (\rho - l_0)^2$$

que está en función únicamente de ρ y $\dot{\rho}$.

Ahora, la conservación de la energía mecánica tendría la siguiente forma:

$$E_0 = E_f$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \frac{l_0^2 v_0^2}{\rho^2} \right) + \frac{1}{2} k (\rho - l_0)^2 \quad (5)$$

Nos piden determinar v_0 t.q. $\rho_{máx} = 4 l_0$. Por lógica, en el instante que ρ alcanza su máximo (o mínimo), la rapidez radial es nula, o sea $\dot{\rho} = 0$. Entonces, reemplazando

$$\rho = 4 l_0 \quad y \quad \dot{\rho} = 0$$

en (5) obtenemos la ec. para v_0,

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \frac{l_0^2 v_0^2}{16 l_0^2} + \frac{9}{2} k l_0^2$$

$$\Leftrightarrow v_0^2 \left(\frac{1}{2} m - \frac{1}{32} m \right) = \frac{9}{2} k l_0^2$$

$$\Rightarrow \boxed{v_0 = + \sqrt{\frac{48}{5} \frac{k l_0^2}{m}}}$$

c) La rapidez máx (o lo que es lo mismo: la energía cinética máx.) se da cuando la energía potencial es mínima. Como $U = U_R$ es una función cuadrática, su mínimo se da cuando $U_R(\rho^*) = 0$, que en este caso es en $\rho^* = l_0$, que es la posición en el tiempo inicial, donde sabemos que la rapidez es v_0

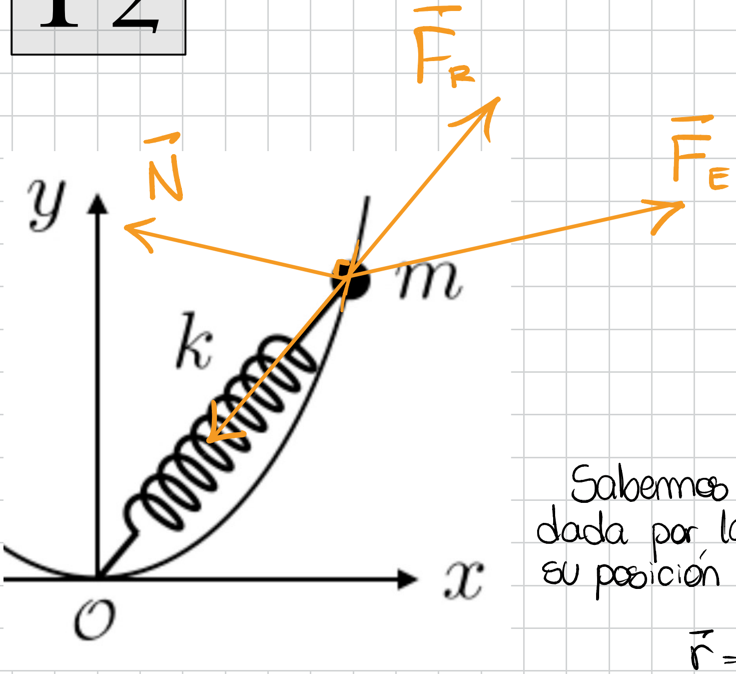
$\therefore$ La rapidez máxima es v_0

Mientras que la rapidez mínima (energía cinética mín.) se da cuando la energía potencial es máxima. Debido a que U_R crece según ρ, esta se maximiza cuando ρ es máximo, que por **b)** sabemos que $\rho_{máx} = 4 l_0$, donde además $\dot{\rho} = 0$, así que la rapidez máx. sería

$$|\vec{v}|_{max} = \sqrt{\cancel{\dot{\rho}^2}^{=0} + \frac{l_0^2 v_0^2}{\cancel{\rho^2}_{=16l_0^2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{l_0^2 v_0^2}{16 l_0^2}} = \frac{v_0}{4}$$

P2



a) No tenemos $\vec{g}$, así que no hay fuerza peso. Las únicas fuerzas actuando sobre m son:

- Resorte $\vec{F}_R$
- Normal $\vec{N}$
- Fuerza externa $\vec{F}_E$

Sabemos que la partícula se mueve siguiendo una parábola dada por la forma del alambre, así que podemos escribir su posición en cartesianas como

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = x\hat{\imath} + \frac{x^2}{x_0}\hat{\jmath} \quad (1)$$

y por la def. de trabajo

$$W_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \quad (2)$$

sabemos que no ejercen trabajo las fuerzas que son perpendiculares a la trayectoria, ya que si $\vec{F} \perp \vec{r}$

$$\Rightarrow \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0 \qquad \forall \vec{r} \in [\vec{r}_A, \vec{r}_B]$$

$$\Rightarrow W_{A\to B} = 0$$

Por la expresión de nuestras fuerzas tenemos que $\vec{N} \perp \vec{r}$, mientras que $\vec{F}_R$ y $\vec{F}_E$ no son perpendiculares a la trayectoria

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_R \text{ y } \vec{F}_E \text{ realizan trabajo}}$$

b) Sabemos que $\vec{F}_R$ es conservativa al ser central, por lo que no necesitamos usar (2) para calcular su trabajo, sino que ocuparemos

$$W^c_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}^c(\vec{r})\cdot d\vec{r} = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) \quad (3)$$

donde $\vec{F}^c = \vec{F}_R$ y $U(\vec{r}) = \frac{1}{2}k(r-l_0)^2 = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+\frac{x^4}{x_0^2}} - \overset{=0}{\cancel{l_0}}\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(x^2+\frac{x^4}{x_0^2}\right)$

Debemos definir los límites de integración, en este caso

$$\vec{r}_A = x_0\hat{\imath} + y_0\hat{\jmath} = x_0\hat{\imath} + x_0\hat{\jmath} \qquad \text{y} \qquad \vec{r}_B = x_f\hat{\imath} + y_f\hat{\jmath} = \lambda x_0\hat{\imath} + \lambda^2 x_0\hat{\jmath}$$

y reemplazando en $U(\vec{r})$

- $U(x=x_0) = kx_0^2$
- $U(x=\lambda x_0) = \frac{1}{2}k(\lambda^2+\lambda^4)x_0^2$

y ocupando (3)

$$\Rightarrow W^R_{x_0\to\lambda x_0} = U(x_0) - U(\lambda x_0) = kx_0^2 - \frac{1}{2}k(\lambda^2+\lambda^4)x_0^2 \quad (4)$$

Mientras que para $\vec{F}_E$ ocuparemos directamente (2)

$$\vec{F}_E(x,y) = \frac{k}{x_0}\left(xy\hat{\imath} + \frac{3}{4}x_0 y\hat{\jmath}\right)$$

$$= \frac{k}{x_0}\left(\frac{x^3}{x_0}\hat{\imath} + \frac{3}{4}x^2\hat{\jmath}\right)$$

Calculamos el diferencial de posición con (1)

$$d\vec{r} = dx\hat{\imath} + 2\frac{x}{x_0}dx\hat{\jmath}$$

y reemplazando en (2)

$$\Rightarrow W^E_{x_0\to\lambda x_0} = \int_{x_0}^{\lambda x_0} \vec{F}_E(x)\cdot d\vec{r} = \int_{x_0}^{\lambda x_0} \frac{k}{x_0}\left(\frac{x^3}{x_0}\hat{\imath} + \frac{3}{4}x^2\hat{\jmath}\right)\cdot\left(dx\hat{\imath} + 2\frac{x}{x_0}dx\hat{\jmath}\right)$$

$$= \frac{k}{x_0}\int_{x_0}^{\lambda x_0}\left(\frac{x^3}{x_0} + \frac{3}{2}\frac{x^3}{x_0}\right)dx$$

$$= \frac{5}{2}\frac{k}{x_0^2}\int_{x_0}^{\lambda x_0} x^3 dx$$

$$= \frac{5}{8}k(\lambda^4-1)x_0^2 \quad (5)$$

Juntando (4) con (5) obtenemos el trabajo total

$$W^{tot}_{x_0\to\lambda x_0} = W^R_{x_0\to\lambda x_0} + W^E_{x_0\to\lambda x_0} = kx_0^2 - \frac{1}{2}k(\lambda^2+\lambda^4)x_0^2 + \frac{5}{8}k(\lambda^4-1)x_0^2$$

$$= \boxed{\frac{3}{8}kx_0^2 - \frac{1}{2}k\lambda^2x_0^2 + \frac{1}{8}k\lambda^4x_0^2} \quad (6)$$

c) Que la partícula vuelva a tener la rapidez que tenía en x_0 es lo mismo que vuelva a tener la misma energía cinética $K(x=x_0)$, o sea queremos

$$K(x_0) \overset{!}{=} K(x_f)$$

Revisando el formulario notamos que

$$W^{tot}_{A\to B} = K(\vec{r}_B) - K(\vec{r}_A)$$

y en **b)** ya calculamos $W^{tot}_{x_0\to\lambda x_0}$ para un λ cualquiera, así que si imponemos nuestra condición

$$K(x_0) \stackrel{!}{=} K(\lambda x_0)$$

es equivalente a imponer $W^{tot}_{x_0\to\lambda x_0} \stackrel{!}{=} 0$, de donde podemos despejar λ. Igualemos a 0 la expresión de (6)

$$W^{tot}_{x_0\to\lambda x_0} = \frac{3}{8}k x_0^2 - \frac{1}{2}k\lambda^2 x_0^2 + \frac{1}{8}k\lambda^4 x_0^2 \stackrel{!}{=} 0$$

y si definimos $\tilde{\lambda} := \lambda^2$ obtenemos una ec. cuadrática

$$\tilde{\lambda}^2 - 4\tilde{\lambda} + 3 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\lambda}_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4\pm 2}{2} = 3 \text{ ó } 1$$

$$\Rightarrow \lambda \in \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1, -1\}$$

así que la partícula tiene la misma rapidez en $x = \{\sqrt{3}x_0, -\sqrt{3}x_0, x_0, -x_0\}$