Auxiliar 9

Trabajo y Energía

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

P1.-

Una partícula P de masa m desliza sin roce por el interior de un cono invertido. El cono tiene eje vertical, vértice abajo y ángulo característico $\theta = \pi/3$. La partícula está unida a un hilo, siempre tenso, que pasa por el vértice del cono. La tensión T es tal que la distancia entre la partícula y el vértice disminuye en la forma: $r_0 - v_0 t$. En el instante inicial P está a distancia r_o del vértice girando de modo que $\dot{\phi}(0) = \omega_0$, en torno al eje central.

(a) Reduzca la segunda ley de Newton a tres ecuaciones escalares e indique la dependencia explícita en t de cada una de las coordenadas de P.

(b) Obtenga la condición que debe cumplirse para que el hilo esté tenso en el instante inicial.

(c) Obtenga por definición y por teoremas el trabajo W_T de la tensión T desde el momento inicial hasta el instante t_1 en que la distancia de P al vértice es la mitad de la inicial. Explique el significado físico del signo de este trabajo.

(d) Obtenga la energía cinética en un instante t arbitrario y de ahí obtenga la diferencia $K_1 - K_0$ entre la energía cinética final ($t = t_1$) y la inicial ($t = 0$). ¿Cuánto vale $K_1 - K_0 - W_T$? ¿Por qué?

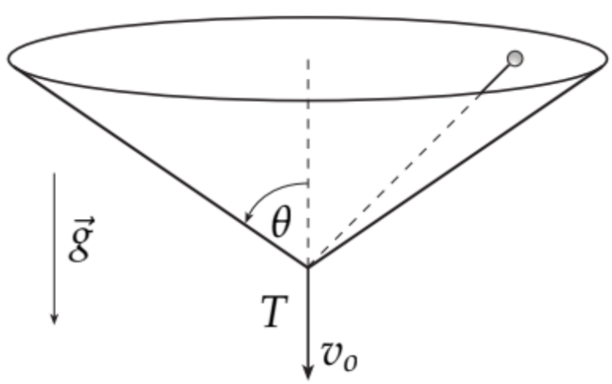


Figura 1: Pregunta 1

P2.-

Una partícula P de masa m se mueve por un riel horizontal circunferencial de radio R. El único tipo de roce que hay es un roce viscoso lineal, $-c\vec{v}$, donde c es una constante conocida.

(a) Si P es lanzada desde $\theta = 0$ con rapidez v_o, calcule el trabajo de la fuerza neta en función de θ.

(b) Determine el valor que debe tener v_o para que P se detenga justo cuando ha avanzado media vuelta.

P3.-

Una partícula de masa m se mueve con rapidez constante v_0 por el exterior de un semi-cilindro horizontal de radio R. Además del peso y la fuerza normal que ejerce la superficie, la partícula está sometida a otras dos fuerzas, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. La primera fuerza está dada por

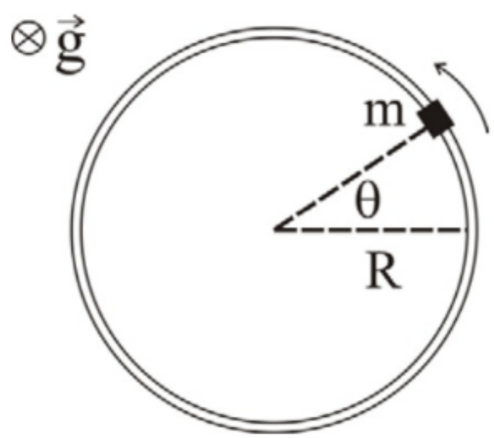
$$\vec{F}_1 = -c(xy^2\hat{x} + yx^2\hat{y})$$

donde c es una constante conocida y las coordenadas (x, y) se miden con respecto al origen $\mathcal{O}$. La otra fuerza $\vec{F}_2$, para la cual no se cuenta con una expresión explícita, es la que permite que la partícula se mueva con rapidez constante en su trayectoria desde el origen $\mathcal{O}$ a la cúspide C.

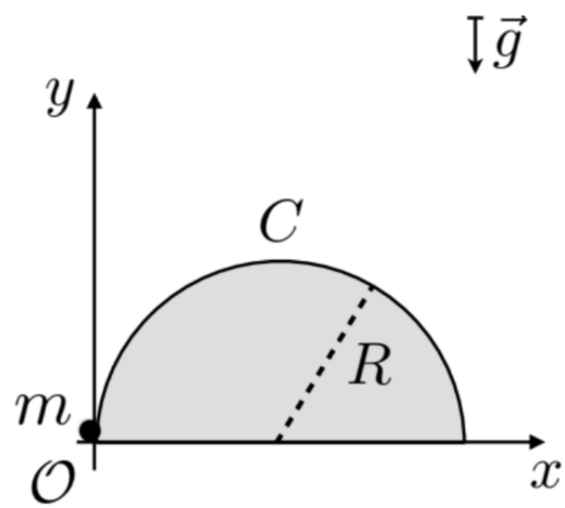
(a) Muestre que la fuerza $\vec{F}_1$ es conservativa.

(b) Determine una expresión para el potencial $u(x, y)$ asociado a $\vec{F}_1$.

(c) Determine el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}_2$ en el trayecto de $\mathcal{O}$ a C.



(a) Pregunta 2



(b) Pregunta 3

Formulario

Trabajo

Se define el **trabajo** ejercido por una fuerza entre dos puntos arbitrarios A y B, con trayectoria C, como:

$$W_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde el resultado es una cantidad escalar que puede ser positiva o negativa dependiendo de la trayectoria.

Energía cinética

La **energía cinética** de una partícula de masa m se define como

$$K \equiv \frac{1}{2} m ||\vec{v}||^2$$

Además, el **trabajo total** debido a la fuerza total $\vec{F}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ es

$$W_{A\to B}^{tot} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_{tot} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = K_B - K_A$$

Potencial

Se define **gradiente** ∇U de un potencial U mediante el símbolo nabla

$$\nabla \equiv \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Si una fuerza $\vec{F}_c$ es **conservativa**, entonces debe existir un potencial U tal que

$$\vec{F} = -\nabla U$$

Teorema: Una fuerza es conservativa si, y solo si, su rotor es nulo, es decir

$$\vec{F} = -\nabla U \quad \iff \quad \nabla \times \vec{F} = 0$$

El trabajo debido a una **fuerza conservativa** es la diferencia del potencial inicial y final.

$$W_{A\to B}^{c} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_c \cdot \mathrm{d}\vec{r} = U_A - U_B$$

Energía mecánica

La **energía mecánica** de un sistema de una partícula es igual a la suma de su energía cinética K y potencial U

$$E = K + U$$

El trabajo debido a las **fuerzas no-conservativas** $\vec{F}_{nc}$ corresponde a la diferencia de energía mecánica evaluado al inicio y al final del camino.

$$W^{nc}_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_{nc} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = E_B - E_A$$

En caso de no presentar fuerzas no-conservativas, ocurre **conservación de energía**.

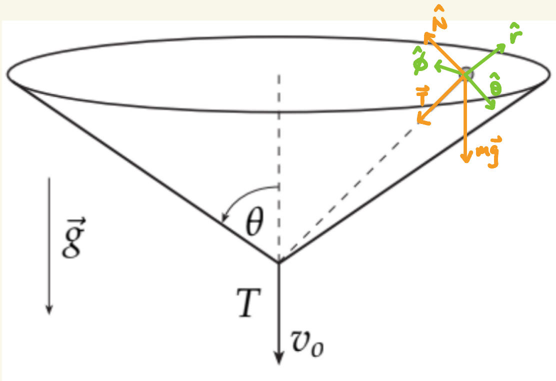
Aux 9. Trabajo y Energía

P1

Una partícula P de masa m desliza sin roce por el interior de un cono invertido. El cono tiene eje vertical, vértice abajo y ángulo característico $\theta = \pi/3$. La partícula está unida a un hilo, siempre tenso, que pasa por el vértice del cono. La tensión T es tal que la distancia entre la partícula y el vértice disminuye en la forma: $r_0 - v_0 t$. En el instante inicial P está a distancia r_o del vértice girando de modo que $\dot{\phi}(0) = \omega_0$, en torno al eje central.

(a) Reduzca la segunda ley de Newton a tres ecuaciones escalares e indique la dependencia explícita en t de cada una de las coordenadas de P.

(b) Obtenga la condición que debe cumplirse para que el hilo esté tenso en el instante inicial.



a) Hacemos DCL y usamos coordenadas esféricas,

$$\ddot{\vec{r}} = (\cancel{\ddot{r}} - r\cancel{\dot{\theta}^2} - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta)\hat{r} + (r\cancel{\ddot{\theta}} + 2\dot{r}\cancel{\dot{\theta}} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta)\hat{\theta}$$

$$+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta)\hat{\phi}$$

en este caso,

$$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0 \wedge \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \cos\theta = \frac{1}{2}$$

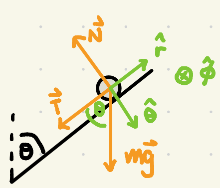
$$r = r_0 - v_0 t \Rightarrow \dot{r} = -v_0 \wedge \ddot{r} = 0$$

reemplazamos

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -r\dot{\phi}^2\underbrace{\sin^2\theta}_{\frac{3}{4}}\hat{r} - r\dot{\phi}^2\underbrace{\sin\theta}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\underbrace{\cos\theta}_{\frac{1}{2}}\hat{\theta} + \frac{1}{r}\underbrace{\sin\theta}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}\underbrace{\sin^2\theta}_{\frac{3}{4}})\hat{\phi}$$

$$= -\frac{3}{4}(r_0 - v_0 t)\dot{\phi}^2\hat{r} - \frac{\sqrt{3}}{2}(r_0 - v_0 t)\dot{\phi}^2\hat{\theta} + \frac{1}{(r_0 - v_0 t)}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{4}(r_0 - v_0 t)^2\dot{\phi}\right)\hat{\phi}$$

Por otro lado, las fuerzas



$$\sum\vec{F} = -T\hat{r} - N\hat{\theta} + mg(-\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta})$$

$$= -T\hat{r} - N\hat{\theta} + mg\left(-\frac{1}{2}\hat{r} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\theta}\right)$$

$\left(\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \cos\theta = \frac{1}{2}\right)$

Escribiendo la 2° Ley de Newton, por componentes queda

$\hat{r}|$ $$-T - \frac{1}{2}mg = -\frac{3}{4}m(r_0 - v_0 t)\dot{\phi}^2 \quad (1)$$

$\hat{\theta}|$ $$-N + \frac{\sqrt{3}}{2}mg = -\frac{\sqrt{3}}{2}m(r_0 - v_0 t)\dot{\phi}^2 \quad (2)$$

$\hat{\phi}|$ $$0 = \frac{1}{(r_0 - v_0 t)}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{4}(r_0 - v_0 t)^2\dot{\phi}\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{3}{4}(r_0 - v_0 t)^2\dot{\phi}\right] = 0 \quad (3)$$

Ahora, ya conocemos $r(t)$ y $\theta(t)$, nos falta $\phi(t)$. Notamos que solo en (3) no se presentan incógnitas, así que lo integramos hasta obtener $\phi(t)$.

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{3}{4}(r_0-v_0t)^2\dot{\phi}\right]=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{4}(r_0-v_0t)^2\dot{\phi}=c \quad (\text{cte})$$

como es cte $\forall t$, en particular, se cumple para $t=0$, donde $\dot{\phi}(t=0)=\omega_0$

$$\underline{\cancel{\tfrac{3}{4}}(r_0-v_0t)^2\dot{\phi}}=c=\frac{3}{4}(r_0-v_0\cdot 0)^2\omega_0=\underline{\cancel{\tfrac{3}{4}}r_0^2\omega_0}$$

despejando $\dot{\phi}$ de las ecuaciones subrayadas

$$\dot{\phi}(t)=\frac{r_0^2\omega_0}{(r_0-v_0t)^2} \qquad / \int dt$$

integrando otra vez más, por regla de la cadena

$$\phi(t)=-\frac{r_0^2\omega_0}{(r_0-v_0t)}\cdot\left(-\frac{1}{v_0}\right)+c=\frac{r_0^2\omega_0}{v_0(r_0-v_0t)}+c \qquad \text{recordamos que } \int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}$$

tomando $\phi(t=0)=0$

$$\phi(0)=\frac{r_0^{\cancel{2}}\omega_0}{v_0\cancel{r_0}}+c=\frac{r_0\omega_0}{v_0}+c=0 \quad\Rightarrow\quad c=-\frac{r_0\omega_0}{v_0}$$

Finalmente

$$\boxed{\phi(t)=\frac{r_0^2\omega_0}{v_0(r_0-v_0t)}-\frac{r_0\omega_0}{v_0}}$$

b) Reemplazamos $\dot{\phi}$ en (1) para obtener una expresión para T.

$$+T+\frac{1}{2}mg=+\frac{3}{4}m\cancel{(r_0-v_0t)}\frac{r_0^4\omega_0^2}{(r_0-v_0t)^{\cancel{4}\,3}} \quad\Rightarrow\quad T=\frac{3}{4}m\frac{r_0^4\omega_0^2}{(r_0-v_0t)^3}-\frac{1}{2}mg$$

ahora veamos el caso límite para que exista tensión, es decir $T(t=0)\overset{!}{>}0$

$$T=\frac{3}{4}m\frac{r_0^{\cancel{4}}\omega_0^2}{\cancel{r_0^3}}-\frac{1}{2}mg>0 \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{4}\cancel{m}r_0\omega_0^2>\frac{1}{2}\cancel{m}g$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{r_0\omega_0^2>\frac{2}{3}g}$$

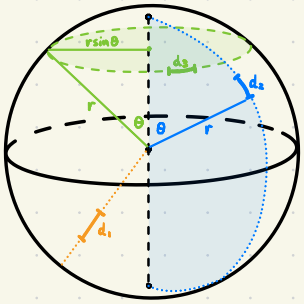
(c) Obtenga por definición y por teoremas el trabajo W_T de la tensión T desde el momento inicial hasta el instante t_1 en que la distancia de P al vértice es la mitad de la inicial. Explique el significado físico del signo de este trabajo.

(d) Obtenga la energía cinética en un instante t arbitrario y de ahí obtenga la diferencia K_1-K_0 entre la energía cinética final ($t=t_1$) y la inicial ($t=0$). ¿Cuánto vale $K_1-K_0-W_T$? ¿Por qué?

c) Por definición

$$W_T=\int_{r_0}^{\vec{r}_f}\vec{T}\cdot d\vec{r} \qquad \text{donde } r_f=\frac{1}{2}r_0$$

¿Y la trayectoria? Para ello, podemos pensar en "cómo se mueve una partícula en esférica", necesariamente, avanzará en $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$. Pero, ¿Cuánto?



Veamos, recordamos que el largo de un arco de un círculo de radio R, barrido un ángulo α es $R\alpha$, así, $d\vec{r}$ (el cambio infinitesimal en la posición) se puede describir como la suma de los cambios en cada componente de la base.

$$\left.\begin{array}{l} d_1 = dr \\ d_2 = r\,d\theta \\ d_3 = r\sin\theta\, d\phi \end{array}\right\} d\vec{r} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\, d\phi\,\hat{\phi}$$

* Otra alternativa para obtener $d\vec{r}$ es a partir de la velocidad ($d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}dt = \vec{v}\,dt$)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\sin\theta\frac{d\phi}{dt}\hat{\phi} \quad /dt$$

$$\Rightarrow d\vec{r} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\, d\phi\,\hat{\phi}$$

En este caso, $\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow d\theta = 0$

$$\Rightarrow d\vec{r} = dr\,\hat{r} + r\sin\theta\, d\phi\,\hat{\phi}$$

además, recordamos que $r = r_0 - v_0 t$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\dot{\phi} = \frac{r_0^2\omega_0}{(r_0 - v_0 t)^2} = \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow d\phi = \frac{r_0^2\omega_0}{(r_0 - v_0 t)^2}dt$

$$\Rightarrow d\vec{r} = dr\,\hat{r} + (r_0 - v_0 t)\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{r_0^2\omega_0}{(r_0 - v_0 t)^2}dt\;\hat{\phi}$$

Reemplazando en W_T

$$W_T = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} -\left[\frac{3}{4}m\frac{r_0^4\omega_0^2}{(r_0 - v_0 t)^3} - \frac{1}{2}mg\right]\hat{r} \cdot \left[dr\,\hat{r} + (r_0 - v_0 t)\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{r_0^2\omega_0}{(r_0 - v_0 t)^2}dt\;\hat{\phi}\right] \qquad (\hat{r}\cdot\hat{r} = 1 \;,\; \hat{r}\cdot\hat{\phi} = 0)$$

$$= \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} -\left[\frac{3}{4}m\frac{r_0^4\omega_0^2}{(r_0 - v_0 t)^3} - \frac{1}{2}mg\right]dr \longrightarrow \text{¿Y sobre qué variable integramos?}$$

Recordamos que $r = r_0 - v_0 t$, así que hay 2 caminos: integrar en t o en r.

r] Reemplazamos $r_0 - v_0 t = r$ en el denominador, así, nuestros límites serán de r_0 a $\frac{r_0}{2}$.

t] Como $r = r_0 - v_0 t \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -v_0 \Rightarrow dr = -v_0 dt$ e integramos con respec. al variable t de 0 a t_1

$$W_T = \int_0^{t_1} -\left[\frac{3}{4}m\frac{r_0^4\omega_0^2}{(r_0 - v_0 t)^3} - \frac{1}{2}mg\right](-v_0 dt)$$

PERO, nos dará W_T en función de t_1, y de todas formas hay que transformarlo en cosas conocidas ($\frac{r_0}{2} = r_0 - v_0 t_1$)

$$\int \frac{1}{x^3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}$$

$$= \int_{r_0}^{\frac{r_0}{2}} -\left[\frac{3}{4}m\frac{r_0^4\omega_0^2}{r^3} - \frac{1}{2}mg\right]dr$$

$$= -\frac{3}{4}m r_0^4\omega_0^2\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{2}mgr\Bigg|_{r_0}^{\frac{r_0}{2}}$$

$$= -\frac{3}{4}m r_0^4\omega_0^2\left[-\frac{1}{2}\frac{4}{r_0^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{r_0^2}\right] + \frac{1}{2}mg\left[\frac{r_0}{2} - r_0\right]$$

$$= -\frac{3}{4}m r_0^{\cancel{4}\,2}\omega_0^2\left(-\frac{3}{2}\frac{1}{\cancel{r_0^2}}\right) + \frac{1}{2}mg\left(-\frac{r_0}{2}\right)$$

$$\boxed{W_T = \frac{9}{8}m r_0^2\omega_0^2 - \frac{1}{4}mgr_0}$$

Notar que si se cumple $r_0\omega_0^2 > \frac{2}{3}g$ (lo calculado en b)), entonces

$$W_T = \frac{9}{8}m\underbrace{r_0^2\omega_0^2}_{>\frac{2}{3}gr_0} - \frac{1}{4}mgr_0 > 0 \quad \Rightarrow \text{El trabajo siempre es positivo!}$$

$\Rightarrow \vec{T}$ "aporta en hacer avanzar"

Ahora, por propiedades, tenemos al trabajo total

$$W_{tot} = W_T + W_N + W_{mg}$$

pero $\vec{N}$ es perpendicular a $d\vec{r}$ ($\vec{N} = N\hat{\theta}$ y $d\vec{r}$ está en $\hat{r}$ y $\hat{\phi}$) $\Rightarrow W_N = 0$ $\quad (\vec{N}\cdot d\vec{r} = 0)$

$$\Rightarrow W_T = W_{TOT} - W_{mg}$$

donde $W_{TOT} = K_f - K_i$ y $m\vec{g}$ al ser fuerza conservativa, entonces $W_{mg} = U_{gi} - U_{gf}$, calculemos cada uno por separado

$\boxed{W_{TOT}}$ K está definido como $K = \frac{1}{2}mv^2$, calculemos $v = \|\vec{v}\|^2$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\cancel{\dot{\theta}}^{\,0\ (\theta=\frac{\pi}{2})}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\phi} = -v_0\hat{r} + \frac{r_0^2\omega_0}{r}\sin\theta\,\hat{\phi} \qquad \left(\text{de a)},\ \dot{\phi} = \frac{r_0^2\omega_0}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow \|\vec{v}\|^2 = v_0^2 + \frac{r_0^4\omega_0^2}{r^2}\sin^2\theta$$

Condición inicial : $r(t=0) = r_0 \quad \Rightarrow \quad K_i = \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 + r_0^2\omega_0^2\frac{3}{4}\right)$

Condición final : $r(t=t_1) = \frac{r_0}{2} \quad \Rightarrow \quad K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 + 3r_0^2\omega_0^2\right)$

$$\therefore W_{TOT} = K_f - K_i = \frac{1}{2}m\left(\cancel{v_0^2} + 3r_0^2\omega_0^2\right) - \frac{1}{2}m\left(\cancel{v_0^2} + \frac{3}{4}r_0^2\omega_0^2\right) = \frac{1}{2}mr_0^2\omega_0^2\left(3 - \frac{3}{4}\right) = \frac{9}{8}mr_0^2\omega_0^2$$

$\boxed{W_{mg}}$ U_g está definida como $U_g(z) = mgz$, en este caso $z = r\cos\theta$

Condición inicial : $r = r_0 \Rightarrow z = r_0\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow U_{gi} = mg\frac{r_0}{2}$

Condición final : $r = \frac{r_0}{2} \Rightarrow z = r_0\frac{1}{4} \Rightarrow U_{gf} = mg\frac{r_0}{4}$

$$\therefore W_{mg} = U_{gi} - U_{gf} = mg\frac{r_0}{2} - mg\frac{r_0}{4} = \frac{1}{4}mgr_0$$

Finalmente

$$W_T = W_{TOT} - W_{mg} = \frac{9}{8}mr_0^2\omega_0^2 - \frac{1}{4}mgr_0$$

llegamos a lo mismo ! ü

d) Como ya calculamos $K(r)$ y sabemos que $r = r_0 - v_0t$, solo nos falta reemplazarlo para obtener $K(t)$

$$\Rightarrow K(t) = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 + \frac{3}{4}\frac{r_0^4\omega_0^2}{(r_0 - v_0t)^2}\right)$$

Ahora calculamos $K_1 - K_0$ (ya lo hicimos en la parte c))

$$\Rightarrow K_1 - K_0 = K_f - K_i = \frac{9}{8}mr_0^2\omega_0^2$$

Finalmente

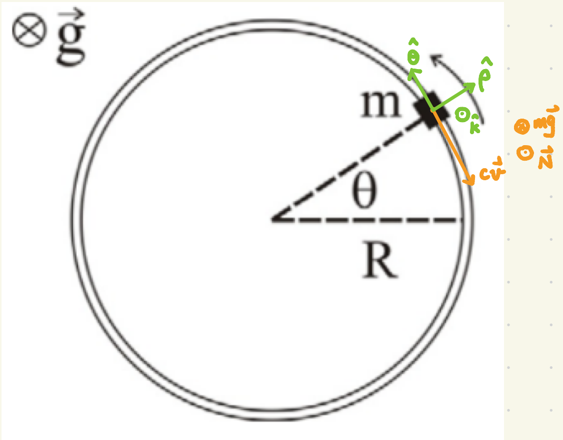
$$K_1 - K_0 - W_T = K_f - K_i - W_T = W_{TOT} - W_T = W_{mg} \qquad (\text{pues } W_N = 0)$$

P2

Una partícula P de masa m se mueve por un riel horizontal circunferencial de radio R. El único tipo de roce que hay es un roce viscoso lineal, $-c\vec{v}$, donde c es una constante conocida.

(a) Si P es lanzada desde $\theta = 0$ con rapidez v_o, calcule el trabajo de la fuerza neta en función de θ.

(b) Determine el valor que debe tener v_o para que P se detenga justo cuando ha avanzado media vuelta.



a) La fuerza neta es

$$\sum \vec{F} = N\hat{k} - mg\hat{k} - cv\hat{\theta}$$

pero $\ddot{\vec{r}} = (\cancel{\ddot{\rho}} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (\cancel{2\dot{\rho}\dot{\theta}} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta} + \cancel{\ddot{z}}\hat{k}$ con $z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$ y $\rho = R \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -R\dot{\theta}^2\hat{\rho} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

por 2° Ley de Newton por componentes

$$\hat{\rho}] \quad -mR\dot{\theta}^2 = 0 \qquad (1)$$

$$\hat{\theta}] \quad mR\ddot{\theta} = -cv \qquad (2)$$

$$\hat{z}] \quad 0 = N - mg \Rightarrow N = mg \qquad (3)$$

Luego, por (3), se anulan los componentes en $\hat{k}$

$$\sum \vec{F}_i = -cv\hat{\theta}$$

pero v es una incógnita, donde

$$\vec{v} = \cancelto{0}{\dot{\rho}}\hat{\rho} + \cancelto{R}{\rho}\dot{\theta}\hat{\theta} + \cancelto{0}{\dot{z}}\hat{k} = R\dot{\theta}\hat{\theta} \Rightarrow v = R\dot{\theta}$$

en (2)

$$m\cancel{R}\ddot{\theta} = -c\cancel{R}\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{c}{m}\dot{\theta}$$

(Truco mecánica $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta}$)

$$\Rightarrow \cancel{\dot{\theta}}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\frac{c}{m}\cancel{\dot{\theta}} \qquad / \int d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} d\dot{\theta} = -\int_0^{\theta} \frac{c}{m}\, d\theta$$

(Como $v = R\dot{\theta} \Rightarrow v_0 = R\dot{\theta}_0 \Rightarrow \dot{\theta}_0 = \frac{v_0}{R}$)

$$\Rightarrow \int_{\frac{v_0}{R}}^{\dot{\theta}} d\dot{\theta} = -\int_0^{\theta} \frac{c}{m}\, d\theta$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} - \frac{v_0}{R} = -\frac{c}{m}\theta$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_0}{R} - \frac{c}{m}\theta$$

Finalmente, la fuerza neta tiene valor

$$\sum \vec{F}_i = -cv\hat{\theta} = -cR\dot{\theta}\hat{\theta} = -cR\left(\frac{v_0}{R} - \frac{c}{m}\theta\right)\hat{\theta}$$

Así, su trabajo de $\theta = 0$ a θ cualquiera es

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \int_0^\theta -cR\left(\frac{v_0}{R} - \frac{c}{m}\theta\right)\hat{\theta} \cdot R d\theta \hat{\theta}$$

(análogo a $\underline{P_1}$, $d\vec{r} = R d\theta \hat{\theta}$)

$$= \int_0^\theta -cR^2\left(\frac{v_0}{R} - \frac{c}{m}\theta\right) d\theta$$

$$= -cR^2\left(\frac{v_0}{R}\theta - \frac{c}{2m}\theta^2\right)$$

$$\boxed{W_{TOT} = -c v_0 R\theta + c^2 \frac{R^2}{2m}\theta^2}$$

* Si lo queremos hacer por las propiedades, usamos que $W_{TOT} = K_f - K_i$

$$K_i = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$K_f = \frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} m \left[R\left(\frac{v_0}{R} - \frac{c}{m}\theta\right)\right]^2 = \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{v_0}{R} - \frac{c}{m}\theta\right)^2$$

$$\Rightarrow W_{TOT} = \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{v_0}{R} - \frac{c}{m}\theta\right)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$= \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{v_0^2}{R^2} + \frac{c^2}{m^2}\theta^2 - 2\frac{v_0 c}{Rm}\theta\right) - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$= \cancel{\frac{1}{2} m v_0^2} + \frac{1}{2}\frac{c^2 R^2}{m}\theta^2 - R v_0 c\theta - \cancel{\frac{1}{2} m v_0^2}$$

llegamos a lo mismo :D

b) Tomamos $\theta_f = \pi$ y para que se detenga justo en tal punto $\Rightarrow v_f = 0$, luego

$$v_f = R\dot{\theta}_f = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}_f = 0 = \frac{v_0}{R} - \frac{c}{m}\theta_f = \frac{v_0}{R} - \frac{c}{m}\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{v_0 = \frac{cR}{m}\pi} \quad //$$

Made with Goodnotes

P3

Una partícula de masa m se mueve con rapidez constante v_0 por el exterior de un semicilindro horizontal de radio R. Además del peso y la fuerza normal que ejerce la superficie, la partícula está sometida a otras dos fuerzas, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. La primera fuerza está dada por

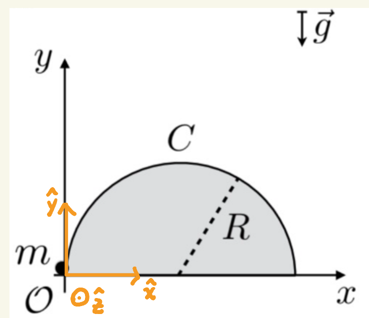
$$\vec{F}_1 = -c(xy^2\hat{x} + yx^2\hat{y})$$

donde c es una constante conocida y las coordenadas (x, y) se miden con respecto al origen $\mathcal{O}$. La otra fuerza $\vec{F}_2$, para la cual no se cuenta con una expresión explícita, es la que permite que la partícula se mueva con rapidez constante en su trayectoria desde el origen $\mathcal{O}$ a la cúspide C.

(a) Muestre que la fuerza $\vec{F}_1$ es conservativa.

(b) Determine una expresión para el potencial $u(x, y)$ asociado a $\vec{F}_1$.

(c) Determine el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}_2$ en el trayecto de $\mathcal{O}$ a C.



a) Usemos el teorema

$$\vec{F}_1 \text{ conservativa} \Leftrightarrow \nabla\times\vec{F}_1 = 0$$

Calculemos el rotor de $\vec{F}_1$

$$\nabla\times\vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (\partial_y F_z - \partial_z F_y)\hat{x} - (\partial_x F_z - \partial_z F_x)\hat{y} + (\partial_x F_y - \partial_y F_x)\hat{z}$$

$$= (\partial_y F_z - \partial_z F_y)\hat{x} + (\partial_z F_x - \partial_x F_z)\hat{y} + (\partial_x F_y - \partial_y F_x)\hat{z}$$

* El término $\partial_x F_z$ indica derivada parcial de F_z con respecto a x, tomando a los otros variables como si fuesen ctes. Y así análogo para todos los otros términos.

en este caso, $\vec{F}_1(x,y) = F_x\hat{x} + F_y\hat{x} \Rightarrow \begin{cases} \partial_z = 0 & (\text{no depende de } z) \\ F_z = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \nabla\times\vec{F}_1 = (\partial_y \cancel{F_z}^{0} - \cancel{\partial_z F_y}^{0})\hat{x} + (\cancel{\partial_z F_x}^{0} - \partial_x \cancel{F_z}^{0})\hat{y} + (\partial_x F_y - \partial_y F_x)\hat{z}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}(-cyx^2) - \frac{\partial}{\partial y}(-cxy^2)\right]\hat{z}$$

$$= \left[\cancel{-cy2x} + \cancel{cx2y}\right]\hat{z} = 0$$

Es decir, $\nabla\times\vec{F}_1 = 0$, luego, $\vec{F}_1$ es conservativo.

b) Como $\vec{F}_1$ es conservativa, está asociada a un potencial tal que $\vec{F}_1 = -\nabla U$, donde ∇U (gradiente de U) está dada por

$$\nabla U = \frac{\partial}{\partial x}U\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}U\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}U\hat{z}$$

luego $\vec{F}_1 = -\nabla U$ por componentes :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}U &= -F_x = +cyx^2 \\ \frac{\partial}{\partial y}U &= -F_y = +cxy^2 \end{aligned}\right\} \text{se puede esperar que } U = \tfrac{1}{2}cx^2y^2 + \underbrace{k}_{\text{constante que depende de dónde definimos } U=0}$$

Made with Goodnotes

O también podemos resolverlo matemáticamente... (NO se pide que ustedes sepan resolver ecuaciones diferenciales parciales, eso es materia de CAA, esto es sólo para que vean cómo se hace matemáticamente, los potenciales en este siempre son a la dificultad que lo puede adivinar)

$$\frac{\partial}{\partial x} U = -F_x = +c\,x y^2 \qquad / \int dx$$

$$\Rightarrow U = c\tfrac{1}{2}x^2y^2 + k(y)$$ → $k(y)$ es el constante c/r a x, porque es el cte de la primitiva que aparece integrando c/r a x, pero para derivadas parciales, no se puede asumir que también sea cte c/r a y.

reemplazamos en la 2° ecuación

$$\frac{\partial}{\partial y} U = \frac{\partial}{\partial y}\left(c\tfrac{1}{2}x^2y^2 + k(y)\right) = +c\,y x^2$$

$$c\cancel{\tfrac{1}{2}}x^2\cancel{2}y + \frac{\partial}{\partial y}k(y) = c\,y x^2$$

$$\Rightarrow \cancel{cyx^2} + \frac{\partial}{\partial y}k(y) = \cancel{cyx^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}k(y) = 0 \qquad / \int dy$$

$$\Rightarrow k(y) = k \qquad (\text{cte} \in \mathbb{R})$$

Finalmente, llegamos a lo mismo que intuímos, $\boxed{U = \tfrac{1}{2}c x^2 y^2 + k}$

c) Para calcular el trabajo de $\vec{F_2}$, primero, necesitamos una expresión explícita de $\vec{F_2}$, a lo que usamos 2° Ley de Newton. Usando cilíndricas,

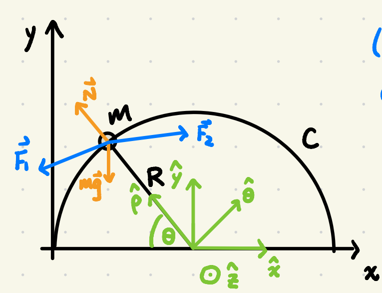
$$\ddot{\vec{r}} = (\cancel{\ddot{\rho}} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\cancel{\dot{\rho}}\dot{\theta} + \rho\cancel{\ddot{\theta}})\hat{\theta} + \cancel{\ddot{z}}\hat{k}$$ donde $\rho = R \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0 \ \wedge \ z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$

Además, la partícula se mueve a rapidez cte. de O a C $\Rightarrow v_0 = R\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_0}{R} \ \wedge \ \ddot{\theta} = 0$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -R\frac{v_0^2}{R^2}\hat{\rho} = -\frac{v_0^2}{R}\hat{\rho}$$

mientras que las fuerzas son

$$\sum \vec{F_i} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + N\hat{\rho} - mg\,\hat{k}$$



($\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ están dibujados en cualquier dirección)

así, la 2° Ley de Newton queda

$$-m\frac{v_0^2}{R}\hat{\rho} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + N\hat{\rho} - mg\,\hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{F_2} = -m\frac{v_0^2}{R}\hat{\rho} - \vec{F_1} - N\hat{\rho} + mg\,\hat{y}$$

Con esto, podemos sacar el trabajo de $\vec{F_2}$ desde O a C mediante la definición, con $d\vec{r} = Rd\theta\,\hat{\theta}$

$$W_{F_2} = \int_O^C \vec{F_2}\cdot d\vec{r} = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[-m\frac{v_0^2}{R}\hat{\rho} - \vec{F_1} - N\hat{\rho} + mg\,\hat{y}\right]\cdot Rd\theta\,\hat{\theta}$$

recordamos que $\vec{F_1}$ es conservativa, luego $W_{F_1} = \int_O^C \vec{F_1}\cdot d\vec{r} = U_O - U_C$

$$\Rightarrow W_{F_2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-m\frac{v_0^2}{R}\hat{\rho} - N\hat{\rho} + mg\,\hat{y}\right]\cdot Rd\theta\,\hat{\theta} - (U_O - U_C)$$

Siguiendo, calculamos los valores de U_0 y U_c

$$U_0 = U(x=0, y=0) = \tfrac{1}{2}c\,0^2 \cdot 0^2 + \underline{k}$$

$$U_c = U(x=R, y=R) = \tfrac{1}{2}c\,R^2 R^2 + \underline{k}$$

$$\Rightarrow \quad U_0 - U_c = \cancel{k} - \left(\tfrac{1}{2}cR^4 + \cancel{k}\right) = -\tfrac{1}{2}cR^4$$

* Comentario largo jeje...

Notamos que los potenciales al ser integral de un $\vec{F}$, siempre va a soltar un constante k, que matemáticamente, nunca vamos a saber cuánto vale (pues no se suele tener datos del condición inicial o final), pero no importa! ü porque lo que nos importa es la diferencia ΔU y se nos va a cancelar los k. Además, esto traducido a la física, significa que uno puede definir $U=0$ en donde quiera y está completamente válido!

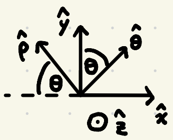
luego

$$W_{F_2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-m\frac{v_0^2}{R}\hat{\rho} - N\hat{\rho} + mg\,\hat{y}\right] \cdot R\,d\theta\,\hat{\theta} + \tfrac{1}{2}cR^4$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} mg\,\hat{y} \cdot R\,d\theta\,\hat{\theta} + \tfrac{1}{2}cR^4$$

$(\hat{\rho} \cdot \hat{\theta} = 0)$

notamos que



$$\hat{y} = (\sin\theta\,\hat{\rho} + \cos\theta\,\hat{\theta})$$

reemplazando

$$W_{F_2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mg(\sin\theta\,\hat{\rho} + \cos\theta\,\hat{\theta}) \cdot R\,d\theta\,\hat{\theta} + \tfrac{1}{2}cR^4$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} mgR\cos\theta\,d\theta + \tfrac{1}{2}cR^4$$

$$= mgR\,\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \tfrac{1}{2}cR^4$$

$$= mgR\sin\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2}cR^4$$

$$\boxed{W_{F_2} = mgR + \tfrac{1}{2}cR^4}$$

* Si lo queremos hacer sólo con las propiedades, usamos que $\vec{F_2}$ es la única fuerza no-conservativa (ignoramos $\vec{N}$, pues sabemos que $W_N = 0$)

$$\Rightarrow \quad W_{F_2} = E_f - E_i$$

Condición inicial : $E_i = K_i + U_i = K_i + U_{g_i} + U_{F,i} = \tfrac{1}{2}mv_0^2 + 0 + 0 = \tfrac{1}{2}mv_0^2$

Condición final : $E_f = K_f + U_f = K_f + U_{gf} + U_{gf} = \tfrac{1}{2}mv_0^2 + mgR + \tfrac{1}{2}cR^4$

$$\Rightarrow \quad W_{F_2} = \cancel{\tfrac{1}{2}mv_0^2} + mgR + \tfrac{1}{2}cR^4 - \cancel{\tfrac{1}{2}mv_0^2}$$

$$\boxed{W_{F_2} = mgR + \tfrac{1}{2}cR^4}$$

nuevamente llegamos a lo mismo ! :)