Auxiliar 9

Trabajo y Energía

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

P1.-

Una partícula P de masa m desliza sin roce por el interior de un cono invertido. El cono tiene eje vertical, vértice abajo y ángulo característico $\theta = \pi/3$. La partícula está unida a un hilo, siempre tenso, que pasa por el vértice del cono. La tensión T es tal que la distancia entre la partícula y el vértice disminuye en la forma: $r_0 - v_0 t$. En el instante inicial P está a distancia r_o del vértice girando de modo que $\dot{\phi}(0) = \omega_0$, en torno al eje central.

(a) Reduzca la segunda ley de Newton a tres ecuaciones escalares e indique la dependencia explícita en t de cada una de las coordenadas de P.

(b) Obtenga la condición que debe cumplirse para que el hilo esté tenso en el instante inicial.

(c) Obtenga por definición y por teoremas el trabajo W_T de la tensión T desde el momento inicial hasta el instante t_1 en que la distancia de P al vértice es la mitad de la inicial. Explique el significado físico del signo de este trabajo.

(d) Obtenga la energía cinética en un instante t arbitrario y de ahí obtenga la diferencia $K_1 - K_0$ entre la energía cinética final ($t = t_1$) y la inicial ($t = 0$). ¿Cuánto vale $K_1 - K_0 - W_T$? ¿Por qué?

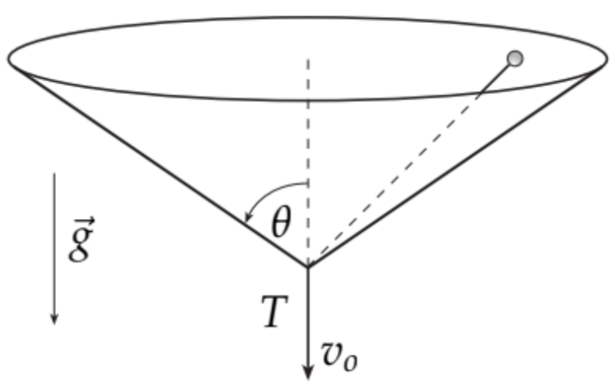


Figura 1: Pregunta 1

P2.-

Una partícula P de masa m se mueve por un riel horizontal circunferencial de radio R. El único tipo de roce que hay es un roce viscoso lineal, $-c\vec{v}$, donde c es una constante conocida.

(a) Si P es lanzada desde $\theta = 0$ con rapidez v_o, calcule el trabajo de la fuerza neta en función de θ.

(b) Determine el valor que debe tener v_o para que P se detenga justo cuando ha avanzado media vuelta.

P3.-

Una partícula de masa m se mueve con rapidez constante v_0 por el exterior de un semicilindro horizontal de radio R. Además del peso y la fuerza normal que ejerce la superficie, la partícula está sometida a otras dos fuerzas, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. La primera fuerza está dada por

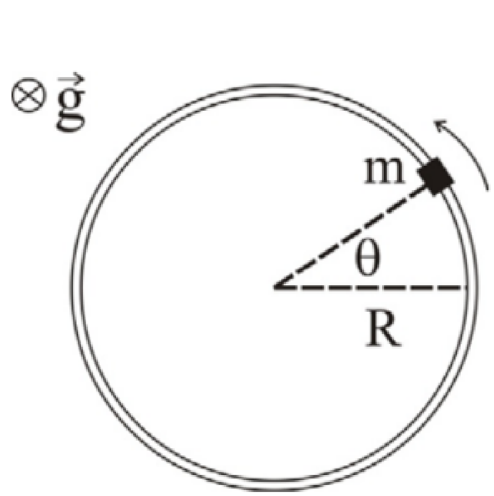
$$\vec{F}_1 = -c(xy^2\hat{x} + yx^2\hat{y})$$

donde c es una constante conocida y las coordenadas (x, y) se miden con respecto al origen $\mathcal{O}$. La otra fuerza $\vec{F}_2$, para la cual no se cuenta con una expresión explícita, es la que permite que la partícula se mueva con rapidez constante en su trayectoria desde el origen $\mathcal{O}$ a la cúspide C.

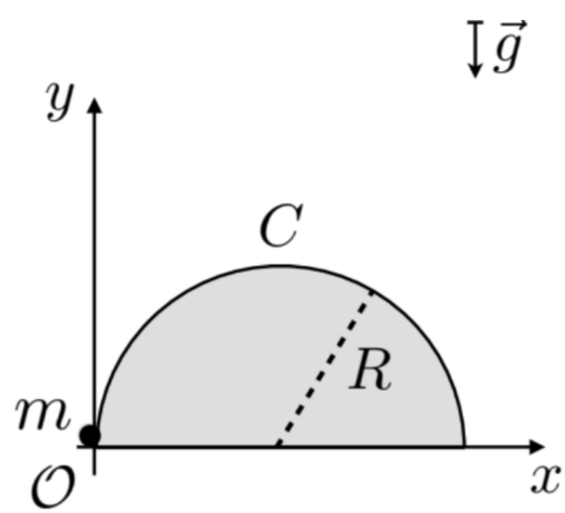
(a) Muestre que la fuerza $\vec{F}_1$ es conservativa.

(b) Determine una expresión para el potencial $u(x, y)$ asociado a $\vec{F}_1$.

(c) Determine el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}_2$ en el trayecto de $\mathcal{O}$ a C.



(a) Pregunta 2



(b) Pregunta 3

Formulario

Trabajo

Se define el **trabajo** ejercido por una fuerza entre dos puntos arbitrarios A y B, con trayectoria C, como:

$$W_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_b} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

donde el resultado es una cantidad escalar que puede ser positiva o negativa dependiendo de la trayectoria.

Energía cinética

La **energía cinética** de una partícula de masa m se define como

$$K \equiv \frac{1}{2}m||\vec{v}||^2$$

Además, el **trabajo total** debido a la fuerza total $\vec{F}_{tot} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$ es

$$W_{A\to B}^{tot} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_{tot}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = K_B - K_A$$

Potencial

Se define **gradiente** ∇U de un potencial U mediante el símbolo nabla

$$\nabla \equiv \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Si una fuerza $\vec{F}_c$ es **conservativa**, entonces debe existir un potencial U tal que

$$\vec{F} = -\nabla U$$

Teorema: Una fuerza es conservativa si, y solo si, su rotor es nulo, es decir

$$\vec{F} = -\nabla U \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla\times\vec{F} = 0$$

El trabajo debido a una **fuerza conservativa** es la diferencia del potencial inicial y final.

$$W_{A\to B}^{c} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_c\cdot \mathrm{d}\vec{r} = U_A - U_B$$

Energía mecánica

La **energía mecánica** de un sistema de una partícula es igual a la suma de su energía cinética K y potencial U

$$E = K + U$$

El trabajo debido a las **fuerzas no-conservativas** $\vec{F}_{nc}$ corresponde a la diferencia de energía mecánica evaluado al inicio y al final del camino.

$$W^{nc}_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_{nc} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = E_B - E_A$$

En caso de no presentar fuerzas no-conservativas, ocurre **conservación de energía**.