

Auxiliar 8

Dinámica IV

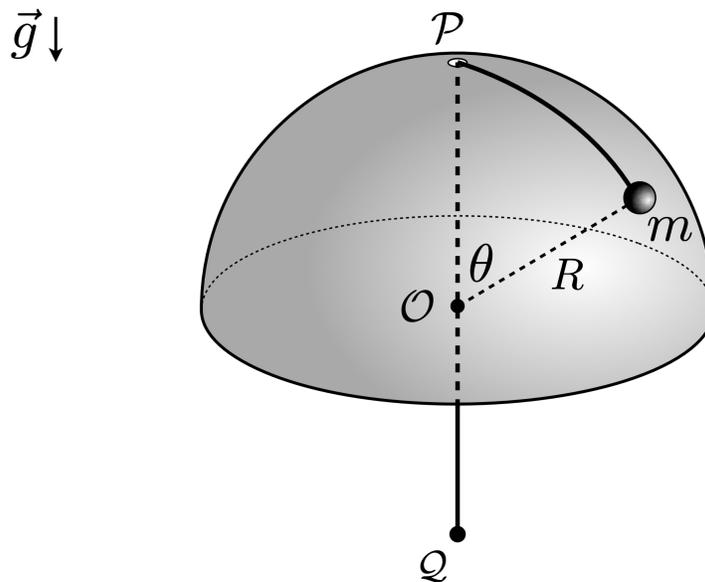
Profesor: Gonzalo Palma

Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

P1.- Control 1 2023

Una bolita de masa m se desliza sin roce sobre un cascarón semi-esférico hueco de radio R . La partícula se encuentra atada a una cuerda ideal que penetra hacia el interior del cascarón por su punto más alto \mathcal{P} , como muestra la figura.

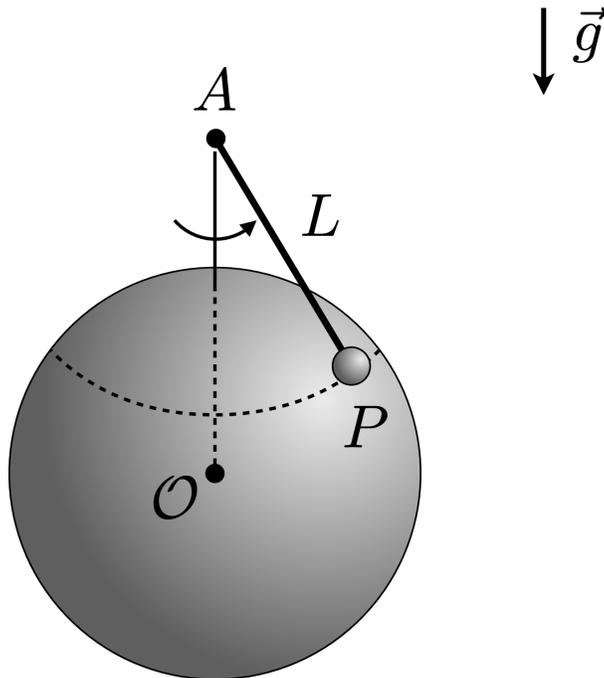
- Si el extremo \mathcal{Q} de la cuerda se mantiene fijo, tal que el ángulo zenital de la partícula se mantiene siempre en $\theta = \pi/3$, determine la máxima velocidad angular $\dot{\phi} = \omega_{\max}$ en torno al eje OP que puede tener la partícula, tal que ella **no se separe del cascarón**
- Si en un segundo experimento la partícula tiene inicialmente $\theta = \pi/3$ y una velocidad angular $\dot{\phi}_0 = \omega_{\max}/3$ en torno a OP y el extremo \mathcal{Q} de la cuerda es tirado hacia abajo con rapidez v_0 constante, encuentre una expresión para la fuerza normal que el cascarón ejerce sobre la partícula en función del ángulo θ



P2.- Control 1 2024

Una partícula P de masa m cuelga de una cuerda AP de largo L cuyo extremo superior permanece fijo en A . La partícula realiza un movimiento circular sobre la superficie de una esfera de radio L cuyo origen O se encuentra justo debajo de A , a una distancia $\sqrt{2}L$. Inicialmente la partícula gira en torno al eje OA con una velocidad angular ω_0 , tal que la fuerza normal que la esfera ejerce sobre P es nula. Además, sobre la partícula actúa una fuerza gravitacional $\vec{F}_g = m\vec{g}$ (ver Figura) y una fuerza de roce cinética de la forma $\vec{F}_{roce} = -F_0\hat{t}$, donde $\hat{t} = \vec{v}/\|\vec{v}\|$ y F_0 es una constante positiva. **Cuidado:** note que esta fuerza no coincide con la fuerza de roce cinética vista en clases.

- Identifique todas las fuerzas y obtenga la ecuación de movimiento respetada por la partícula utilizando coordenadas esféricas $\vec{r} = L\hat{r}$
- Determine el valor de la velocidad angular inicial ω_0 como función de L y g
- Encuentre la velocidad angular de la partícula en torno al eje OA , como función del ángulo barrido por la partícula desde el momento inicial
- Determine el valor de la fuerza que la cuerda ejerce sobre la partícula en función del ángulo de barrido por la partícula desde el momento inicial
- Obtenga el ángulo total ϕ_{tot} que barre P desde el momento inicial hasta que se detiene



Formulario

Ecuación de movimiento

La segunda Ley de Newton nos indica una relación entre la aceleración de una partícula puntual y las fuerzas que actúan sobre ella. Es una ecuación diferencial de segundo orden dada por

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i,$$

donde m es la masa de la partícula, \vec{a} su aceleración, y \vec{F}_i la i -ésima fuerza actuando sobre ella (se suman todas las contribuciones).

Coordenadas esféricas

La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas esféricas** están dados por:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)\hat{\phi} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta)}{dt}\hat{\phi} \end{aligned}$$

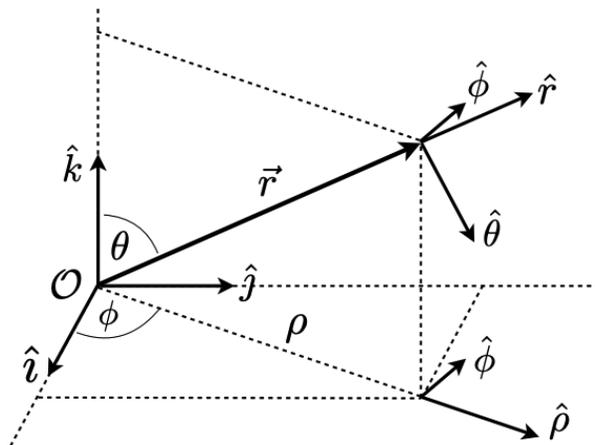


Figura 1: Coordenadas esféricas

Auxiliar 8

P1

a) Ocuparemos coord. esféricas donde

$$r=R \Rightarrow \dot{r}=\ddot{r}=0$$

y para este ítem el ángulo θ es cte., o sea

$$\theta=\pi/3 \Rightarrow \dot{\theta}=\ddot{\theta}=0$$

mientras que para ϕ no podemos decir mucho por el momento.

Por lo tanto, la aceleración sería

$$\vec{a} = -R\dot{\phi}^2 \sin^2\theta \cdot \hat{r} - R\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta \cdot \hat{\theta} + \frac{1}{R \sin\theta} \frac{d}{dt}(R^2 \dot{\phi} \sin^2\theta) \hat{\phi}.$$

Mientras que las fuerzas serían 3:

▷ Normal: $\vec{N} = N \hat{r}$, con $N \equiv \|\vec{N}\| \geq 0$

▷ Tensión de la cuerda: $\vec{T} = -T \hat{\theta}$, con $T \equiv \|\vec{T}\| > 0$

▷ Peso: $m\vec{g} = -mg \cos\theta \cdot \hat{r} + mg \sin\theta \cdot \hat{\theta}$

Reemplazando en 2^{da} Ley de Newton obtenemos la EoM vectorial

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$

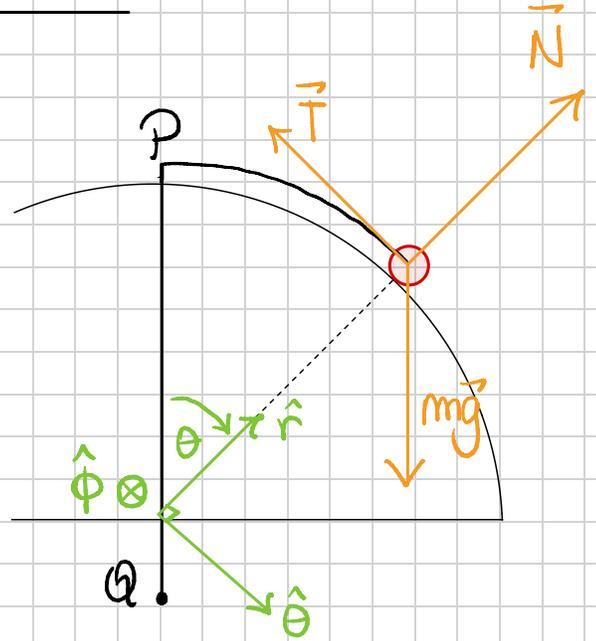
$$\Leftrightarrow -mR\dot{\phi}^2 \sin^2\theta \cdot \hat{r} - mR\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta \cdot \hat{\theta} + \frac{m}{R \sin\theta} \frac{d}{dt}(R^2 \dot{\phi} \sin^2\theta) \hat{\phi} = N \hat{r} - T \hat{\theta} - mg \cos\theta \cdot \hat{r} + mg \sin\theta \cdot \hat{\theta}$$

de donde podemos obtener las EoMs escalares

$$\hat{r}) -mR\dot{\phi}^2 \sin^2\theta = N - mg \cos\theta.$$

$$\hat{\theta}) -mR\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta = -T + mg \sin\theta.$$

$$\hat{\phi}) \frac{m}{R \sin\theta} \frac{d}{dt}(R^2 \dot{\phi} \sin^2\theta) = 0$$



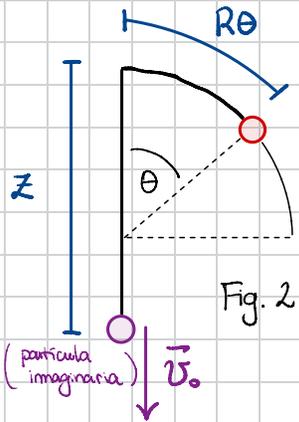
Ahora, sabemos que la rapidez máxima w_{max} está condicionada a que la partícula siga en contacto con el cascarón, entonces el caso límite va a estar dado cuando se cumpla que $N(w_{max}) = 0$.

Notamos que justamente \hat{r} nos da una relación entre N y $\dot{\phi}$, así que imponiendo $N=0$

$$\hat{r}) \Rightarrow N(w_{m\acute{a}x}) = mg \cos \theta_0 - mRw_{m\acute{a}x}^2 \sin^2 \theta_0 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow w_{m\acute{a}x} = + \sqrt{\frac{g \cos \theta_0}{R \sin^2 \theta_0}} = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$$

b) Ya no tenemos la condición $\theta = \pi/3 \forall t$, sino que ahora depende de z . Rápidamente podríamos decir que $\dot{\theta} = -v_0/R$, pero para verlo tomemos el caso de la Fig. 2. Imaginemos que tenemos en Q una partícula que baja verticalmente con rapidez v_0 , entonces la "altura" z iría aumentando como



$$\frac{dz}{dt} = v_0$$

También, imaginemos que la cuerda mide L , entonces $L = z + R\theta$, que tomando su derivada temporal (y considerando una cuerda ideal + q. L es cte.)

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{dz}{dt} + R \frac{d\theta}{dt} \stackrel{dL/dt=0}{=} 0$$

entonces $\dot{\theta} = -v_0/R$ como esperábamos. Ahora sí podemos volver a hacer 2^a Ley de Newton considerando

$$\vec{a} = \left(\frac{-v_0^2}{R} - R\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) \hat{r} - R\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \hat{\theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{d}{dt} (R^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta) \hat{\phi}$$

y que las fuerzas tienen la misma forma de a). Así que los EoMs escalares serían

$$\hat{r}) - m \frac{v_0^2}{R} - R\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = N - mg \cos \theta$$

$$\hat{\theta}) - mR\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = -T + mg \sin \theta$$

$$\hat{\phi}) \frac{m}{R \sin \theta} \frac{d}{dt} (R^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta) = 0$$

De \hat{r} tenemos que

$$N(\theta, \dot{\phi}) = mg \cos \theta - m \frac{v_0^2}{R} - R\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \quad (1)$$

pero nosotros queremos que sea una función únicamente de θ (y constantes), por lo que necesitamos una forma de conseguir $\dot{\phi} = \dot{\phi}(\theta)$.

Para esto usaremos $\hat{\phi}$, ya que sabemos si $\dot{\phi}(t) = 0 \forall t$ entonces $\phi(t) = \phi(0) \forall t$. Así que

$$R^2 \dot{\phi}(t) \sin^2(\theta(t)) = R^2 \dot{\phi}_0 \sin^2 \theta_0 \quad (2)$$

donde $\dot{\phi}_0 := \dot{\phi}(0)$ y $\theta_0 := \theta(0)$, que son C.I. dadas en el enunciado: $\dot{\phi}_0 = w_{m\acute{a}x}/3$ y $\theta_0 = \pi/3$.

Reemplazando en (2) obtenemos una expresión de $\dot{\phi}$ en función de θ

$$(2) \Rightarrow \dot{\phi}(\theta) = \frac{1}{4} \frac{w_{\max}}{\sin^2 \theta}$$

que podemos reemplazar en (1) y obtener lo deseado

$$N(\theta) = mg \cos \theta - m \frac{w^2}{R} - \frac{R}{16} \frac{w_{\max}^2}{\sin^2 \theta}$$

P2

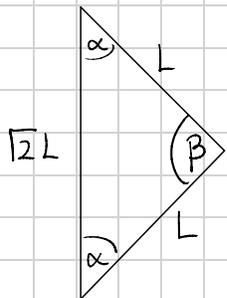
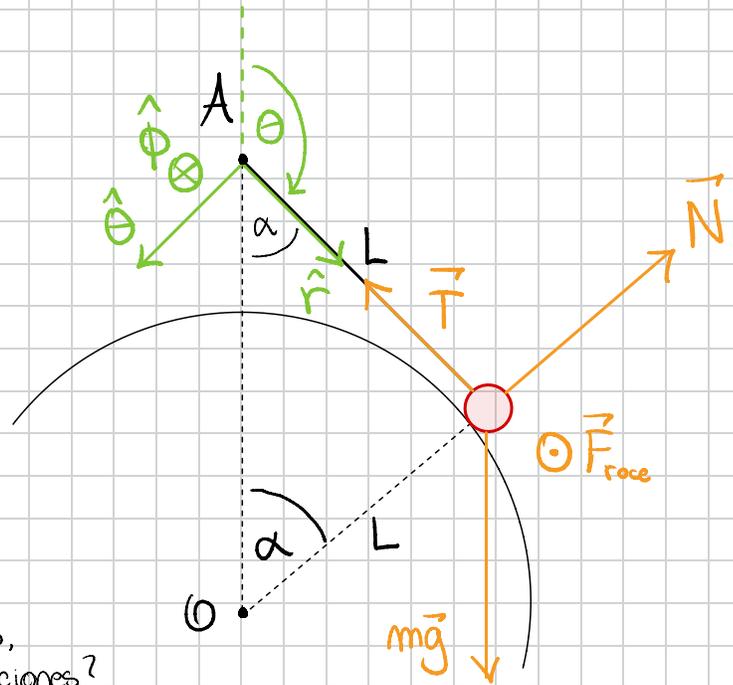
a) Usaremos coord. esféricas centradas en A como se muestra en la Figura. Como la cuerda es de largo L constante

$$r=L \Rightarrow \dot{r}=\ddot{r}=0$$

y el ángulo zenital θ también es constante

$$\theta=\theta_0 \Rightarrow \dot{\theta}=\ddot{\theta}=0$$

Además, sabemos que hay 4 fuerzas: normal, peso, la tensión y el roce. Sin embargo, cuáles son sus direcciones?



Consideremos un triángulo como el de la figura. Usando teo. del coseno

$$2L^2 = L^2 + L^2 - 2L^2 \cos \beta$$

donde vemos que $\cos \beta = 0$, o sea, $\beta = \pi/2 = 90^\circ$. Con esta información sabemos que

- ▷ Normal: $\vec{N} = -N \hat{\theta}$, con $N \equiv \|\vec{N}\| > 0$
- ▷ Peso: $m\vec{g} = +mg \cos \alpha \hat{\theta} + mg \sin \alpha \hat{r}$, donde $\alpha = \pi/4$
- ▷ Tensión: $\vec{T} = -T \hat{r}$, con $T \equiv \|\vec{T}\| > 0$
- ▷ Roca: $\vec{F}_{roce} = -F \hat{t} = -F \hat{\phi}$, ya que $\hat{t} = \vec{v}/\|\vec{v}\| = L\dot{\phi} \sin \theta \hat{\phi} / L\dot{\phi} \sin \theta = \hat{\phi}$

Hacemos 2^a Ley de Newton

$$-mL \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \hat{r} - mL \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \hat{\theta} + mL \ddot{\phi} \sin \theta \hat{\phi} = -N \hat{\theta} + mg \cos \alpha \hat{\theta} + mg \sin \alpha \hat{r} - T \hat{r} - F \hat{\phi}$$

y las EoMs escalares serían

$$\hat{r}) -mL \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = mg \sin \alpha - T$$

$$\hat{\theta}) -mL \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = -N + mg \cos \alpha$$

$$\hat{\phi}) mL \ddot{\phi} \sin \theta = -F$$

b) Queremos la velocidad angular inicial ω , que, por enunciado, cumple que $N=0$ (en el instante inicial). De $\hat{\theta}$ simplemente tomamos $N=0$

$$\Rightarrow \dot{\phi}(0) = \omega_0 = + \sqrt{\frac{-g \cos \alpha}{L \sin \theta \cos \theta}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}g}{L}}$$

$\theta_0 = \pi - \pi/4 \quad \alpha = \pi/4$

c) Queremos $\dot{\phi} = \dot{\phi}(\phi)$, por lo que integraremos $\hat{\phi}$ (donde F_0 es cte.) con truco de mecánica

$$\dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = - \frac{F_0}{mL \sin \theta} \quad / \quad \int_0^{\dot{\phi}} d\dot{\phi}$$

$$\Rightarrow \int_{\omega_0}^{\dot{\phi}(\phi)} \dot{\phi} d\dot{\phi} = - \frac{F_0}{mL \sin \theta} \int_0^{\phi} d\phi$$

$$\Leftrightarrow \dot{\phi}(\phi) = + \sqrt{\omega_0^2 - \frac{2F_0 \phi}{mL \sin \theta}} \quad (1)$$

d) De \hat{r} obtenemos una expresión de $T = T(\dot{\phi})$, que reemplazando con (1) sería

$$T(\phi) = \frac{1}{2} m g + \frac{1}{2} m L \left(\omega_0^2 - \frac{2 \sqrt{2} F_0}{mL} \phi \right)$$

e) La partícula se detiene cuando $\dot{\phi} = 0$, entonces de (1) despejamos

$$\omega_0^2 - \frac{2 \sqrt{2} F_0}{mL} \phi_{\text{par}} = 0$$

$$\Rightarrow \phi_{\text{par}} = \frac{mL \omega_0^2}{2 \sqrt{2} F_0}$$