

Auxiliar 8

Dinámica IV

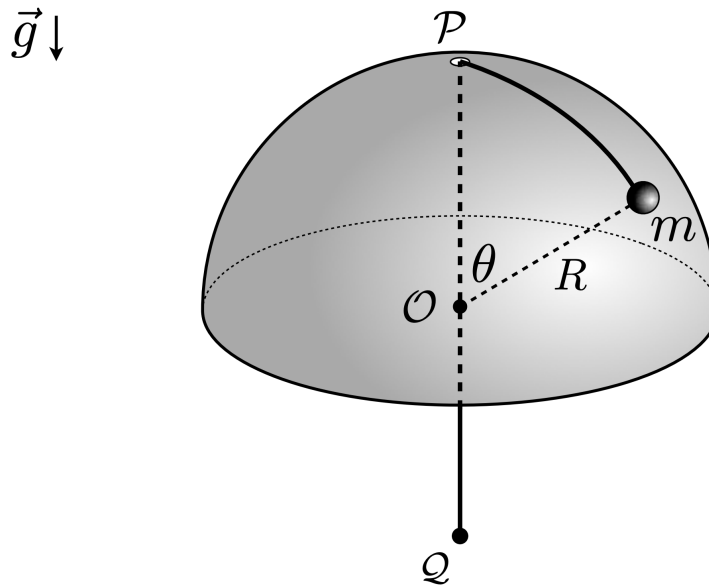
Profesor: Gonzalo Palma

Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

P1.- Control 1 2023

Una bolita de masa m se desliza sin roce sobre un cascarón semi-esférico hueco de radio R . La partícula se encuentra atada a una cuerda ideal que penetra hacia el interior del cascarón por su punto más alto $\mathcal{P}$, como muestra la figura.

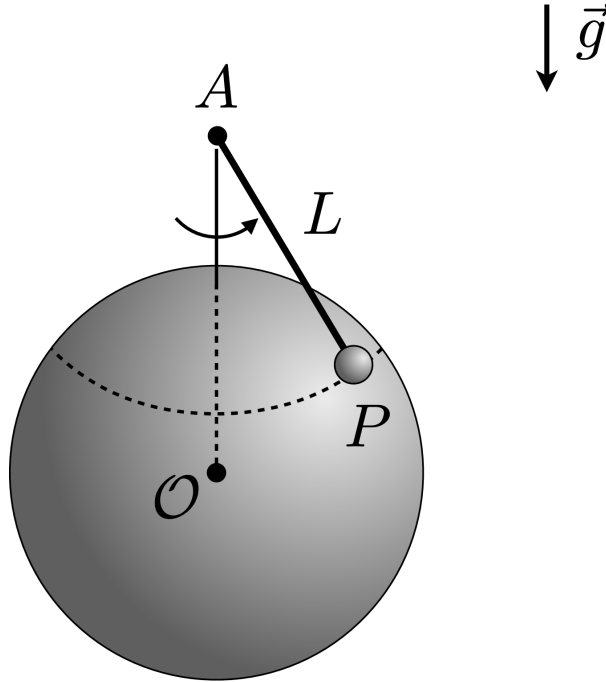
- Si el extremo $\mathcal{Q}$ de la cuerda se mantiene fijo, tal que el ángulo zenital de la partícula se mantiene siempre en $\theta = \pi/3$, determine la máxima velocidad angular $\dot{\phi} = \omega_{\max}$ en torno al eje OP que puede tener la partícula, tal que ella **no se separe del cascarón**
- Si en un segundo experimento la partícula tiene inicialmente $\theta = \pi/3$ y una velocidad angular $\dot{\phi}_0 = \omega_{\max}/3$ en torno a OP y el extremo $\mathcal{Q}$ de la cuerda es tirado hacia abajo con rapidez v_0 constante, encuentre una expresión para la fuerza normal que el cascarón ejerce sobre la partícula en función del ángulo θ



P2.- Control 1 2024

Una partícula P de masa m cuelga de una cuerda AP de largo L cuyo extremo superior permanece fijo en A . La partícula realiza un movimiento circular sobre la superficie de una esfera de radio L cuyo origen $\mathcal{O}$ se encuentra justo debajo de A , a una distancia $\sqrt{2}L$. Inicialmente la partícula gira en torno al eje $\mathcal{O}A$ con una velocidad angular ω_0 , tal que la fuerza normal que la esfera ejerce sobre P es nula. Además, sobre la partícula actúa una fuerza gravitacional $\vec{F}_g = m\vec{g}$ (ver Figura) y una fuerza de roce cinética de la forma $\vec{F}_{\text{roce}} = -F_0\hat{t}$, donde $\hat{t} = \vec{v}/\|\vec{v}\|$ y F_0 es una constante positiva. **Cuidado:** note que esta fuerza no coincide con la fuerza de roce cinética vista en clases.

- Identifique todas las fuerzas y obtenga la ecuación de movimiento respetada por la partícula utilizando coordenadas esféricas $\vec{r} = L\hat{r}$
- Determine el valor de la velocidad angular inicial ω_0 como función de L y g
- Encuentre la velocidad angular de la partícula en torno al eje $\mathcal{O}A$, como función del ángulo barrido por la partícula desde el momento inicial
- Determine el valor de la fuerza que la cuerda ejerce sobre la partícula en función del ángulo de barrido por la partícula desde el momento inicial
- Obtenga el ángulo total ϕ_{tot} que barre P desde el momento inicial hasta que se detiene



Formulario

Ecuación de movimiento

La segunda Ley de Newton nos indica una relación entre la aceleración de una partícula puntual y las fuerzas que actúan sobre ella. Es una ecuación diferencial de segundo orden dada por

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i,$$

donde m es la masa de la partícula, $\vec{a}$ su aceleración, y $\vec{F}_i$ la i -ésima fuerza actuando sobre ella (se suman todas las contribuciones).

Coordenadas esféricas

La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas esféricas** están dados por:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{\phi} \\ &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta)}{dt}\hat{\phi} \end{aligned}$$

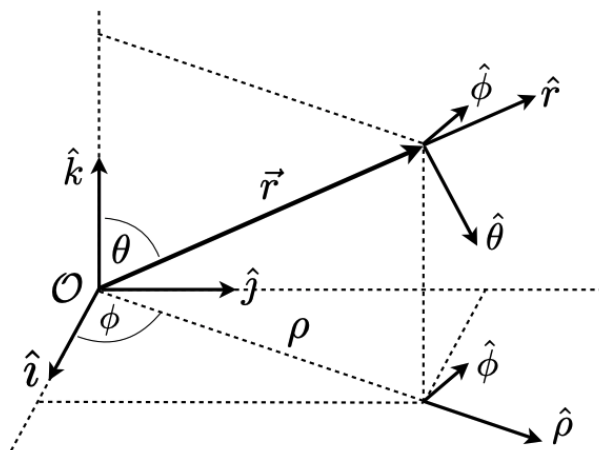


Figura 1: Coordenadas esféricas