

Ejercicio 1

Cinemática

Profesor: Gonzalo Palma

Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

Pregunta.-

Recuerde que la posición en coordenadas cilíndricas viene dada por $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$. Además, recuerde que los vectores bases $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ satisfacen:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\rho} &= \dot{\phi}\hat{\phi}, \\ \frac{d}{dt}\hat{\phi} &= -\dot{\phi}\hat{\rho}.\end{aligned}$$

- Obtenga una expresión para la velocidad $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}$ en las bases $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ y $\hat{k}$
- Obtenga una expresión para la aceleración $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}$ en las bases $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ y $\hat{k}$

Respuesta.-

Usando la definición de $\vec{r}$, su derivada con respecto al tiempo, utilizando regla de la cadena, sería

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\hat{\rho}} + \dot{z}\hat{k} + z\dot{\hat{k}},$$

donde $\dot{q} := \frac{dq}{dt}$. Sabemos que $\hat{k}$ es constante en el tiempo, así que su derivada c/r al tiempo es 0, mientras que para $\hat{\rho}$ tenemos que usar lo otorgado en el enunciado. Por lo que la velocidad estaría dada por:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}. \quad (1)$$

Mientras que para la aceleración tenemos que derivar Eq. (1),

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\dot{\hat{\rho}} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi} + \rho\dot{\phi}\dot{\hat{\phi}} + \ddot{z}\hat{k},$$

donde ocupando las derivadas de $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ obtendríamos

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi} - \rho\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \ddot{z}\hat{k} \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}.\end{aligned}$$