Aux 6. Dinámica II.

☆ Recordamos que, en general, los pasos a seguir de un ejercicio de dinámica son:

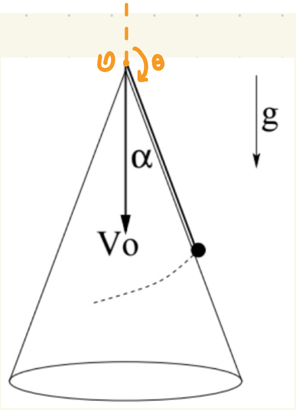
1. Escoger el sist. de coordenadas para describir la posición de la partícula.
2. Calcular la velocidad y aceleración.
3. Hacer DCL e identificar las fuerzas involucradas.
4. Escribir la segunda ley de Newton → EOM
5. Resolverlo y despejar lo que nos piden.

P1

P1.- Una partícula de masa m se mueve sin roce sobre la superficie de un cono de semiángulo α, ubicado de forma vertical con el vértice hacia arriba. La partícula está atada a una cuerda que pasa por el vértice del cono, de donde es recogida con velocidad v_0, como se muestra en la figura. Inicialmente la partícula está a una distancia r_0 del vértice y gira con velocidad angular ω_0.

(a) Determine la distancia a la cual la partícula se despega de la superficie del cono.

(b) Calcule la tensión de la cuerda en ese instante.



a) Como la partícula se mueve en forma de cono, el sistema de coord. más conveniente es la esférica con origen en el vértice, así

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta}$$

$$+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right)\hat{\phi}$$

Donde por enunciado

$$\theta = \pi - \alpha$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$$

* PROPUESTO
Hacerlo con el sistema dado vuelta, tal que $\theta = \alpha$, debería dar lo mismo.

$$\dot{r} = -v_0$$ (se recoge con vel. v_0 ⇒ se acerca al origen, y $\hat{r}$ apunta hacia afuera)

$$\Rightarrow \ddot{r} = 0$$

De esta forma

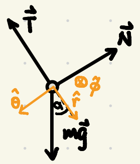
$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$

$$\ddot r_r = \cancelto{0}{\ddot r} - r\cancelto{0}{\dot\theta} - r\dot\phi^2\sin^2\theta = -r\dot\phi^2\sin^2\alpha$$

$$\ddot r_\theta = r\cancelto{0}{\ddot\theta} + 2\dot r\cancelto{0}{\dot\theta} - r\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta = +r\dot\phi^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\ddot r_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot\phi\sin^2\theta\right) = \frac{\sin^{\cancel{2}}\alpha}{r\cancel{\sin\alpha}}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot\phi\right) = \frac{\sin\alpha}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\phi)$$

Ahora, DCL



$$\overset{\text{NII}}{\Rightarrow} \sum \vec F = -N\hat\theta - T\hat r + mg(\cos\alpha\,\hat r + \sin\alpha\,\hat\theta)$$

Obtenemos ec. de mov. $\quad m\ddot{\vec r} = \Sigma F$

$\hat r]\quad -mr\dot\phi^2\sin^2\alpha = -T + mg\cos\alpha \qquad (1)$

Nos sirve para imponer cond. de despegue $N(r)=0$ pero no conocemos $\dot\phi$

$\hat\theta]\quad m\underset{\text{el variable que queremos}}{r}\dot\phi^2\sin\alpha\cos\alpha = -N + mg\sin\alpha \qquad (2)$

$\hat\phi]\quad \underbrace{m\frac{\sin\alpha}{r}}_{\neq 0}\frac{d}{dt}(r^2\dot\phi) = 0 \quad \Rightarrow r^2\dot\phi = c$ (constante) $\qquad (3)$

Como $r^2\dot\phi = c$ es cte para todo tiempo, lo evaluamos para $t=0$, del enunciado,

$$\begin{aligned} r(t=0) &= r_0 \\ \dot\phi(t=0) &= \omega_0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad c = r_0^2\omega_0 = r^2\dot\phi \quad \Rightarrow \quad \dot\phi = \frac{r_0^2\omega_0}{r^2}$$

reemplazamos en (2)

$$mr\left(\frac{r_0^2\omega_0}{r^2}\right)^2\sin\alpha\cos\alpha = -N + mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad N = mg\sin\alpha - m\cancel{r}\frac{r_0^4\omega_0^2}{r^{\cancel{4}\,3}}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= m\sin\alpha\left(1 - \frac{r_0^4\omega_0^2}{r^3 g}\cos\alpha\right)$$

Imponemos condición de despegue $\quad N=0$

$$N = 0 = \underbrace{m\sin\alpha}_{\neq 0}\left(1 - \frac{r_0^4\omega_0^2}{r^3 g}\cos\alpha\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{r^* = \left(\frac{r_0^4\omega_0^2}{g}\cos\alpha\right)^{\frac{1}{3}}}$$

b) Para calcular tensión en tal punto, reemplazamos r^* y $\dot\phi$ calculado en a) en (1)

$$-mr\left(\frac{r_0^2\omega_0}{r^2}\right)^2\sin^2\alpha = -T+mg\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad -m\frac{r_0^4\omega_0^2}{r^3}\sin^2\alpha = -T+mg\cos\alpha$$

$$\Rightarrow -m\frac{\cancel{r_0^4\omega_0^2}}{\frac{\cancel{r_0^4\omega_0^2}}{g}\cos\alpha}\sin^2\alpha = -T+mg\cos\alpha$$

$$\Rightarrow T = mg\cos\alpha + m\frac{g}{\cos\alpha}\sin^2\alpha \qquad /\cdot\cos\alpha$$

$$\Rightarrow T\cos\alpha = mg\left(\cancelto{1}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}\right)$$

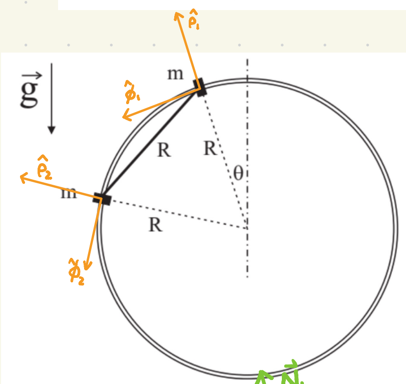
$$\Rightarrow \boxed{T^* = \frac{mg}{\cos\alpha}}$$

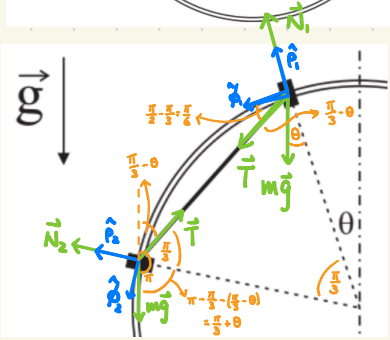
P2

P2.- Dos argollas de masa m deslizan sin roce por un aro vertical de radio R. Las argollas están unidas entre sí por una cuerda ideal de largo R.

(a) Determine la(s) posición(es) del sistema en que las 2 argollas pueden permanecer en reposo, indicando la magnitud de la tensión en cada caso.

(b) Si el sistema es liberado desde el reposo en $\theta = 0$ y con la cuerda estirada, determine el valor de θ para el cual la cuerda pierde su tensión.





a) Usando coord. cilíndricas, para ambas argollas, los componentes en $\hat\rho$ y $\hat z$ son constantes

$$\rho = R \quad\Rightarrow\quad \dot\rho = \ddot\rho = 0$$
$$z = 0 \quad\Rightarrow\quad \dot z = \ddot z = 0$$

luego

$$\ddot{\vec r} = (\cancelto{0}{\ddot\rho} - \rho\dot\phi^2)\hat\rho + (2\cancelto{0}{\dot\rho}\dot\phi + \rho\ddot\phi)\hat\phi + \cancelto{0}{\ddot z}\hat k$$
$$= -R\dot\phi^2\hat\rho + R\ddot\phi\hat\phi$$

Dibujando DCL, se llega a la suma de fuerzas de cada argolla

$$\sum F_1 = N_1\hat\rho_1 + T\left(-\sin\tfrac{\pi}{6}\hat\rho_1 + \cos\tfrac{\pi}{6}\hat\phi_1\right) + mg\left(-\cos\theta\,\hat\rho_1 + \sin\theta\,\hat\phi_1\right)$$

$$\sum F_2 = N_2\hat\rho_2 + T\left(-\cos\tfrac{\pi}{3}\hat\rho_2 - \sin\tfrac{\pi}{3}\hat\phi_2\right) + mg\left(-\cos\left(\tfrac{\pi}{3}+\theta\right)\hat\rho_2 + \sin\left(\tfrac{\pi}{3}+\theta\right)\hat\phi_2\right)$$

Por componentes quedan las EOMs

$$\hat{\rho}_1\big]\quad -mR\dot{\phi}^2 = N_1 - T\sin\tfrac{\pi}{6} - mg\cos\theta \qquad (1)$$

$$\hat{\phi}_1\big]\quad mR\ddot{\phi} = T\cos\tfrac{\pi}{6} + mg\sin\theta \qquad (2)$$

$$\hat{\rho}_2\big]\quad -mR\dot{\phi}^2 = N_2 - T\cos\tfrac{\pi}{3} - mg\cos\left(\tfrac{\pi}{3}+\theta\right) \qquad (3)$$

$$\hat{\phi}_2\big]\quad mR\ddot{\phi} = -T\sin\tfrac{\pi}{3} + mg\sin\left(\tfrac{\pi}{3}+\theta\right) \qquad (4)$$

(porque en este caso ϕ es nuestro único variable, sino se agrega ρ y z tmb)

Ahora, necesitamos que estén en reposo, esto traducido matemáticamente es $\dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$

Vemos que en (1) y (3) están N_1 y N_2 molestando, así que reemplazamos en (2) y (4)

$$(2) \;\Rightarrow\; 0 = T\cos\tfrac{\pi}{6} + mg\sin\theta \qquad (5)$$

$$(4) \;\Rightarrow\; 0 = -T\sin\tfrac{\pi}{3} + mg\sin\left(\tfrac{\pi}{3}+\theta\right)$$

Wii trigonometría ·‿·

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \;\Rightarrow\; \sin\frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$

$$= -T\cos\tfrac{\pi}{6} + mg\sin\left(\tfrac{\pi}{3}+\theta\right) \qquad (6)$$

Sumando (5) + (6)

$$0 = \underbrace{mg}_{\neq 0}\left[\sin\theta + \sin\left(\tfrac{\pi}{3}+\theta\right)\right] \;\Rightarrow\; -\sin\theta = \sin\left(\tfrac{\pi}{3}+\theta\right)$$

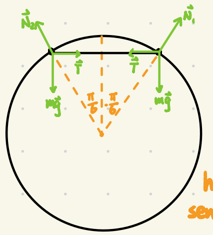
$\sin(\cdot)$ es impar
$-\sin x = \sin(-x)$

$$\Rightarrow\; \sin(-\theta) = \sin\left(\tfrac{\pi}{3}+\theta\right) \qquad / \arcsin(\cdot)$$

$$\Rightarrow\; -\theta = \tfrac{\pi}{3} + \theta$$

$$\Rightarrow\; \theta^* = -\tfrac{\pi}{6}$$

Esto es



hace sentido!!

Es decir, el sistema está en reposo para $\theta^* = -\frac{\pi}{6}$,
falta reemplazarlo en (5) o (6) para obtener T, usemos (5)

$$0 = T\cos\tfrac{\pi}{6} + mg\sin\left(-\tfrac{\pi}{6}\right) = T\cos\tfrac{\pi}{6} - mg\sin\tfrac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; T = mg\tan\tfrac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\; \boxed{T^* = \frac{mg}{\sqrt{3}}}$$

$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) Ahora, para ver cuándo la cuerda pierde tensión, trabajemos de (2) y (4), pues en (1) y (3) nos sigue molestando el N_1 y N_2.

$$m R\underline{\ddot{\phi}} = T\cos\tfrac{\pi}{6} + mg\sin\underline{\theta} \qquad (2)$$

$$m R\underline{\ddot{\phi}} = -T\sin\tfrac{\pi}{3} + mg\sin\left(\tfrac{\pi}{3}+\underline{\theta}\right) \qquad (4)$$

* Aquí queremos imponer $T(\theta) = 0$, por lo que $\ddot{\phi}$ es una incógnita y hay que encontrarlo.

Pero, primero trabajemos un poco (4) para simplificar cálculos.

$$(4)\quad mR\ddot{\phi} = -T\sin\frac{\pi}{3} + mg\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right) \Rightarrow mR\ddot{\phi} = -T\cos\frac{\pi}{6} + mg\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right) \qquad (4')$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x \Rightarrow \sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6}$$

Luego, sumamos (2) + (4') para despejar $\ddot{\phi}$

$$\Rightarrow 2\cancel{m}R\ddot{\phi} = \cancel{m}g\sin\theta + \cancel{m}g\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} = \frac{g}{2R}\left[\sin\theta + \sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right]$$

reemplazando en (2) (también funciona reemplazarlo en (4))

$$m\cancel{R}\frac{g}{2\cancel{R}}\left[\sin\theta + \sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right] = T\cos\frac{\pi}{6} + mg\sin\theta$$

imponiendo $T=0$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{mg}}{2}\left[\sin\theta + \sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right] = \cancel{mg}\sin\theta \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cancel{\sin\theta} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\theta + \sin\theta\cos\frac{\pi}{3} = \cancel{2}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \sin\theta\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\theta \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{\cos\theta\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \qquad \Big/ \arctan(\cdot)$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta^* = \frac{\pi}{3}}$$

P3

P3.- La partícula de masa m puede moverse con roce despreciable entre dos cilindros verticales concéntricos. El radio de ambos cilindros es aproximadamente el mismo valor R. Si inicialmente la partícula tiene velocidad $\vec{v}_0$ que forma un ángulo α con la horizontal, determine:

(a) La reacción neta que ejercen los cilindros sobre la partícula. ↳ Normal

(b) El valor de $\vec{v}_0$ tal que después de n vueltas la partícula llegue justo a la posición inicial.

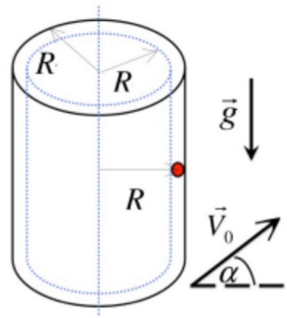


Figura 2: Pregunta 3

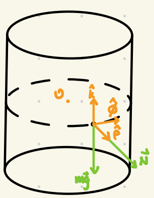
a) En coord. cilíndricas la aceleración es

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}$$

donde ρ está restringida por ambos cilindros, es decir, $\rho = R$ y $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, así

$$\ddot{\vec{r}} = -\rho\dot{\phi}\hat{\rho} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}$$

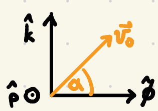
Luego, toca DCL. Pero, ¿para qué lado definimos $\vec{N}$? a priori, no sabemos, así que lo podemos poner para cualquier lado, y que los resultados nos diga el signo.



$$\Rightarrow \sum \vec{F} = \underbrace{N\hat{\rho}}_{\text{normal neta de ambos cilindros}} - mg\hat{k} \quad \stackrel{\text{EOM}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \hat{\rho}\rfloor & -mR\dot{\phi}^2 = N \quad (1) \\ \hat{\phi}\rfloor & \underbrace{mR}_{\neq 0}\ddot{\phi} = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = cte \ \forall t \quad (2) \\ \hat{k}\rfloor & m\ddot{z} = -mg \Rightarrow \ddot{z} = -g \quad (3) \end{cases}$$

Lo que queremos → N ← incógnita

Ahora, la velocidad inicial forma un ángulo α con la horizontal, es decir



$$\vec{v}_0 = v_0(\cos\alpha\,\hat{\phi} + \sin\alpha\,\hat{k})$$

pero sabemos que la velocidad en cilíndricas es $\dot{\vec{r}} = \cancel{\dot{\rho}}^{\,0}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k} = R\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}$, evaluado en $t=0$, nos da que

$$R\dot{\phi}(0) = v_0\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}(0) = \frac{v_0}{R}\cos\alpha$$

$$\dot{z}(0) = v_0 \sin\alpha \qquad (*)$$

Como de (2), $\dot\phi$ es const. $\forall t$

$$\Rightarrow \dot\phi = \dot\phi(0) = \frac{v_0}{R}\cos\alpha \quad (4)$$

como partimos asumiendo el normal positivo para afuera, el signo menos indica que asumimos mal, la normal (neta) va hacia adentro!

reemplazando en (1)

$$-mR\left(\frac{v_0}{R}\cos\alpha\right)^2 = N \qquad \Rightarrow \boxed{\vec{N} = -m\frac{v_0^2}{R}\cos^2\alpha\,\hat\rho}$$

b) Veamos por componente las condiciones para que $\vec{r}_f = \vec{r}_i$

Para ρ, este siempre se cumple, pues $\rho(t) = R\ \forall t$.

En ϕ, integrando (4)

$$\dot\phi(t) = \frac{v_0}{R}\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \phi(t) = \cancelto{0}{\phi(0)} + \left(\frac{v_0}{R}\cos\alpha\right)t \qquad (5)$$

Por otro lado, sabemos que al dar una vuelta equivale a recorrer 2π en ϕ, así, para que luego de n vueltas quede donde igual al ángulo inicial, necesariamente

definiéndolo 0

$$\phi(t) = \cancel{\phi(0)} + 2\pi n = 2\pi n \qquad (6)$$

Igualamos (5) y (6)

$$\phi(t) = 2\pi n = \frac{v_0}{R}\cos\alpha\, t \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{2\pi n R}{v_0\cos\alpha}$$

$\leftarrow$ el momento en que la posición en ϕ se iguala a la inicial.

Ahora en cazo de z, de (3)

$$\ddot z = -g \quad \Rightarrow \quad \dot z = \dot z(0) - gt \overset{(*)}{=} v_0\sin\alpha - gt$$

$$\Rightarrow \quad z = z(0) + (v_0\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

como queremos t tal que $z(t) = z(0)$, lo imponemos

$$\Rightarrow (v_0\sin\alpha)t = \frac{1}{2}gt^2 \quad \underset{t\neq 0}{\Rightarrow} \quad t^* = 2\frac{v_0}{g}\sin\alpha$$

$\leftarrow$ el momento en que la posición en z se iguala a la inicial.

Finalmente igualamos ambos t^*

sin 2α = 2 sinα cosα

$$\frac{\cancel{2}\pi n R}{v_0\cos\alpha} = \cancel{2}\frac{v_0}{g}\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = \frac{\pi n R g}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\pi n R g}{\sin 2\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_0^* = \sqrt{\frac{2\pi n R g}{\sin 2\alpha}}}$$