Aux 3: Vel. angular y Coord. intrínsecas

P1

La trayectoria de un punto P, en coordenadas cilíndricas, se define con:

$$\rho(t) = \rho_0 \qquad \theta(t) = ? \qquad z(t) = h - B\theta(t)$$

Se sabe que $\theta(t)$ es una función monótona, $\theta(0) = 0$ y que $\dot{\theta}(0) = \omega_0$ y donde h, B y ω_0 son constantes positivas conocidas.

(a) Obtenga las expresiones para los vectores velocidad y aceleración en este ejemplo.

(b) Obtenga una expresión para el vector tangente $\hat{t}$ y para la rapidez de P. Comente sobre los signos de estas cantidades.

(c) Obtenga expresiones para las aceleraciones centrípeta y tangencial:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{cent}(t) + \vec{a}_{tg}(t)$$

(d) ¿Cuál es la función $\theta(t)$ si se sabe que la aceleración apunta todo el tiempo perpendicular al eje Z?

a) Tenemos que el vector posición en coordenadas cilíndricas es

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$$

en este caso $\rho(t) = \rho_0$ y $z(t) = h - B\theta(t)$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \rho_0\hat{\rho} + (h - B\theta(t))\hat{k}$$

Derivando, obtenemos los valores de velocidad y aceleración

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\rho_0\hat{\rho} + (h - B\theta(t))\hat{k}\right)$$

$$= \rho_0\dot{\hat{\rho}} + (-B\dot{\theta}(t))\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{v} = \rho_0\dot{\theta}\hat{\theta} - B\dot{\theta}\hat{k}}$$

⚠ Recordar que $\hat{\rho} = \hat{\rho}(t)$ depende del tiempo !!

$$\dot{\hat{\rho}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$$

(lo mismo para $\hat{\theta} = \hat{\theta}(t)$)

$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{\rho}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\rho_0\dot{\theta}\hat{\theta} - B\dot{\theta}\hat{k}\right)$$

$$= \rho_0\ddot{\theta}\hat{\theta} + \rho_0\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} - B\ddot{\theta}\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{a} = \rho_0\ddot{\theta}\hat{\theta} - \rho_0\dot{\theta}^2\hat{\rho} - B\ddot{\theta}\hat{k}}$$

b) El vector tangente está definido como

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

en este caso, la rapidez $\|\vec{v}\|$ es

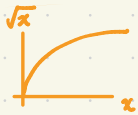
$$\|\vec{v}\| = \|\dot{\vec{r}}\| = \|\rho_0 \dot{\theta} \hat{\theta} - B\dot{\theta}\hat{k}\|$$

$$= \sqrt{(\rho_0 \dot{\theta})^2 + (B\dot{\theta})^2}$$

$$= \sqrt{\dot{\theta}^2(\rho_0^2 + B^2)}$$

$$\|\vec{v}\| = |\dot{\theta}|\sqrt{\rho_0^2 + B^2}$$

$\rightarrow$ La raíz de un número siempre es mayor que 0.



notamos que como θ es una función monótona (siempre crece o siempre decrece), luego, en $t=0$, $\theta(0)=0$ y $\dot{\theta}(0) = \omega_0 > 0$, necesariamente $\dot{\theta} > 0 \quad \forall t$

$$\Rightarrow \|\vec{v}\| = \dot{\theta}\sqrt{\rho_0^2 + B^2}$$

finalmente

$$\hat{t} = \frac{\rho_0 \cancel{\dot{\theta}} \hat{\theta} - B\cancel{\dot{\theta}}\hat{k}}{\cancel{\dot{\theta}}\sqrt{\rho_0^2 + B^2}} = \boxed{\frac{\rho_0}{\sqrt{\rho_0^2 + B^2}}\hat{\theta} - \frac{B}{\sqrt{\rho_0^2 + B^2}}\hat{k} = \hat{t}}$$

c) Queremos expresar la aceleración como

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$$

recordamos que podemos expresar la velocidad en vector tangencial, considerando $v = \|\vec{v}\|$,

$$\vec{v} = v \cdot \frac{\vec{v}}{v} = v\,\hat{t} = \dot{\theta}\sqrt{\rho_0^2 + B^2}\;\hat{t}$$

así, la aceleración es

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\sqrt{\rho_0^2 + B^2}\;\hat{t}\right)$$

Siguiendo ...

Recordar que $\dot{\hat{t}} = \frac{d\hat{t}}{dt} = \vec{n}$

(no es vector unitario, pero nos indica la dirección del vector normal $\hat{n}$, o bien, la dirección de la aceleración centrípeta, que es lo que nos piden)

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\sqrt{\rho_0^2+B^2}\,\hat{t}\right)$$

$$= \ddot{\theta}\sqrt{\rho_0^2+B^2}\,\hat{t} + \dot{\theta}\sqrt{\rho_0^2+B^2}\,\dot{\hat{t}}$$

$$= \ddot{\theta}\sqrt{\rho_0^2+B^2}\,\hat{t} + \dot{\theta}\sqrt{\rho_0^2+B^2}\,\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{\rho_0}{\sqrt{\rho_0^2+B^2}}}_{cte}\,\underset{\hat{\theta}=\hat{\theta}(t)}{\hat{\theta}} - \underbrace{\frac{B}{\sqrt{\rho_0^2+B^2}}}_{cte}\,\hat{k}\right)$$

$$= \ddot{\theta}\sqrt{\rho_0^2+B^2}\,\hat{t} + \dot{\theta}\cancel{\sqrt{\rho_0^2+B^2}}\,\frac{\rho_0}{\cancel{\sqrt{\rho_0^2+B^2}}}(-\dot{\theta}\hat{\rho})$$

$$\vec{a} = \underbrace{\ddot{\theta}\sqrt{\rho_0^2+B^2}\,\hat{t}}_{\vec{a}_{tang.}} - \underbrace{\dot{\theta}^2\rho_0\,\hat{\rho}}_{\vec{a}_{cent.}}$$

Veamos cuál es su valor explícitamente

$$= \ddot{\theta}\cancel{\sqrt{\rho_0^2+B^2}}\left(\frac{\rho_0}{\cancel{\sqrt{\rho_0^2+B^2}}}\,\hat{\theta} - \frac{B}{\cancel{\sqrt{\rho_0^2+B^2}}}\,\hat{k}\right) - \dot{\theta}^2\rho_0\,\hat{\rho}$$

$$= \underbrace{\ddot{\theta}\left(\rho_0\hat{\theta} - B\hat{k}\right)}_{\vec{a}_{tang.}} - \underbrace{\dot{\theta}^2\rho_0\,\hat{\rho}}_{\vec{a}_{cent.}}$$

d) Queremos θ tal que $\vec{a}$ sea perpendicular al eje z, en otras palabras, queremos que $a_z = 0$. Para ello, consideramos sólamente el componente en $\hat{k}$

$$a_z = -B\ddot{\theta} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \quad / \int$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = c \quad (cte\ \forall t)$$

pero por enunciado $\dot{\theta}(0) = \omega_0$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(0) = \omega_0 \quad / \int$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \omega_0 t + c$$

nuevamente, por enunciado $\theta(0) = 0$, reemplazamos

$$\Rightarrow \theta(0) = \omega_0 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \omega_0 t} \quad //$$

Made with Goodnotes

P2

Una barra rígida de largo L se mueve apoyada en dos paredes rígidas que forman un ángulo recto entre ellas. Suponer que el ángulo $\theta = \theta(t)$ es una función arbitraria del tiempo. A partir de esto se pide:

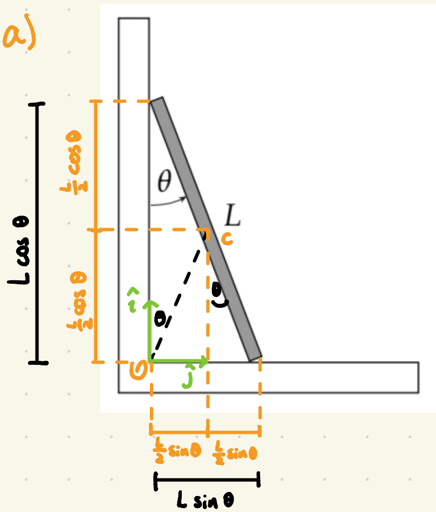
(a) Demostrar que la distancia del centro de la barra con respecto al punto de intersección de las paredes es constante en todo el movimiento.

(b) Encontrar: $\vec{r}(t)$, $\dot{\vec{r}}(t)$ y $\ddot{\vec{r}}(t)$ en coordenadas polares. Siendo $\vec{r}(t)$ la posición del centro de la barra con respecto al origen.

(c) Encontrar el radio de curvatura e interpretar el resultado.

(d) Si la barra parte desde una posición vertical y el extremo inferior se mueve a una rapidez v_0 alejándose de la pared, encontrar $\theta(t)$.

a)



Queremos ver que la distancia $\overline{OC}$ sea constante, o bien $\|\vec{r}_c\| = cte$. Veamos, por geometría del problema,

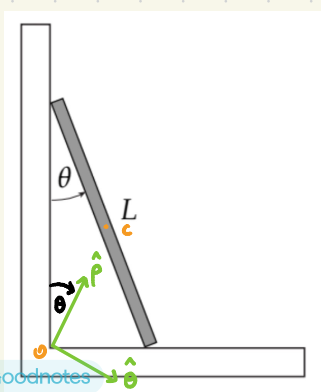
$$\vec{r} = \frac{L}{2}\sin\theta\,\hat{j} + \frac{L}{2}\cos\theta\,\hat{i}$$

$$\Rightarrow \|\vec{r}\| = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\cos\theta\right)^2}$$

$$= \frac{L}{2}\sqrt{\cancel{\sin^2\theta + \cos^2\theta}}\ 1$$

$$\boxed{\|\vec{r}\| = \frac{L}{2}} \longrightarrow \text{constante!!}$$

b)



Recordamos que el vector posición en coordenadas polares (cilíndricas sin $\hat{k}$) está expresado como

$$\vec{r} = \|\vec{\rho}\|\,\hat{\rho} = \frac{L}{2}\hat{\rho}$$

derivamos

$$\dot{\vec{r}} = \frac{L}{2}\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \frac{L}{2}\ddot{\theta}\,\hat{\theta} - \frac{L}{2}\dot{\theta}\,\hat{\rho} \qquad \left(\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\,\hat{\rho}\right)$$

c) El radio de curvatura está definida como

$$\rho_c = \frac{v}{\omega_{\hat{t}}} = \frac{v^3}{\|\vec{v}\times\vec{a}\|}$$

★ Del formulario

$$\omega_{\hat{t}} = \frac{1}{\cancel{\|\hat{t}\|^2}}\,\hat{t}\times\frac{d\hat{t}}{dt}$$

$$= \frac{\vec{v}}{v}\times\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{v}\right) = \frac{1}{v^2}\,\vec{v}\times\vec{a}$$

$$\Rightarrow \omega_{\hat{t}} = \frac{1}{v^2}\|\vec{v}\times\vec{a}\|$$

calculamos

$$v^3 = \|\dot{\vec{r}}\|^3 = \left(\tfrac{L}{2}\dot{\theta}\right)^3$$

$$\vec{v}\times\vec{a} = \left(\tfrac{L}{2}\dot{\theta}\,\hat{\theta}\right)\times\left(\tfrac{L}{2}\ddot{\theta}\,\hat{\theta} - \tfrac{L}{2}\dot{\theta}^2\hat{\rho}\right) \longrightarrow \begin{array}{l}\hat{\theta}\times\hat{\theta} = 0\\ \hat{\theta}\times\hat{\rho} = -\hat{k}\end{array}$$

$$= \left(\tfrac{L}{2}\right)^2\dot{\theta}^3\,\hat{k}$$

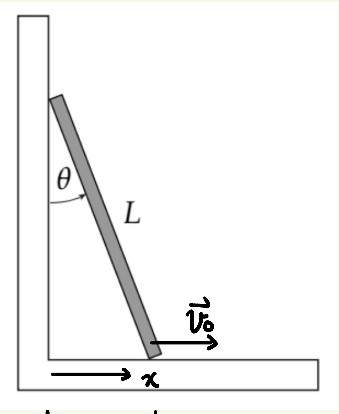
$$\Rightarrow \|\vec{v}\times\vec{a}\| = \left(\tfrac{L}{2}\right)^2\dot{\theta}^3$$

juntando todo

$$\rho_c = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^{\cancel{3}}\cancel{\dot{\theta}^3}}{\cancel{\left(\frac{L}{2}\right)^2}\cancel{\dot{\theta}^3}} = \boxed{\frac{L}{2} = \rho}$$

Tiene sentido! coincide con el resultado de a), donde la distancia del origen al punto c es siempre cte $\frac{L}{2}$.

d)



$L\sin\theta$

Llamando x a la distancia entre el origen y el extremo inferior de la barra, tenemos que

$$v_0 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = v_0 t \qquad \left(\text{pues } \theta(0) = 0 \Rightarrow x(0) = 0\right)$$

Así, por trigonometría

$$L\sin\theta = x = v_0 t$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{v_0 t}{L} \qquad /\arcsin(\cdot)$$

$$\boxed{\theta(t) = \arcsin\left(\frac{v_0 t}{L}\right)}$$

//

P3

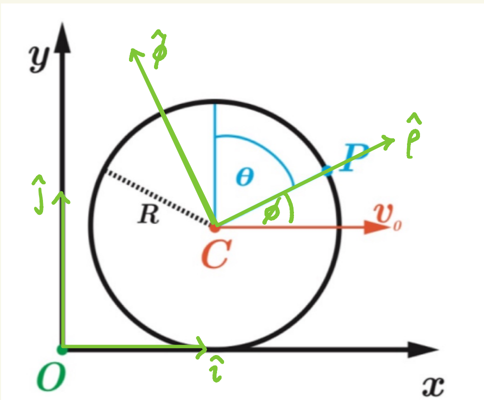
Un disco de radio R rueda sin resbalar por un suelo horizontal. Su centro C tiene velocidad constante $\vec{v} = v_0\hat{x}$, y parte desde el reposo.

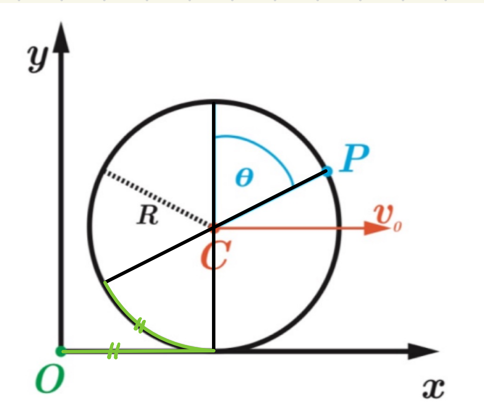
(a) Calcule $\vec{v}(t)$ y $\vec{r}(t)$ de cualquier punto P sobre el borde del disco con respecto a C, en la base de coordenadas cilíndricas.

(b) Calcule $\vec{v}(t)$ y $\vec{r}(t)$ de P con respecto a O.

(c) Calcule la velocidad angular de P, con respecto a O.

a)





Partimos definiendo posición y velocidad de P con respecto a C.

$$\vec{r}_c = R\hat{\rho}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_c = R\dot{\phi}\hat{\phi}$$

⚠ Notar que $\theta \neq \phi$ y no sabemos cuánto es $\dot{\phi}$!!

Ahora, notamos que para las ruedas que "ruedan sin resbalar", se cumple que el arco que toca el piso es igual a la distancia recorrida. Esto se traduce matemáticamente como

$$R\theta = x$$

en este caso, como la rueda se mueve a velocidad $v_0\hat{x}$

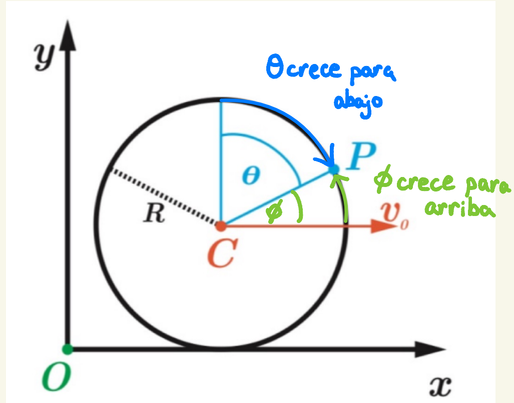
$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0$$

$$\Rightarrow x(t) = v_0 t \qquad (x(0) = 0)$$

Reemplazando en la condición de rodar sin resbalar queda

$$R\theta = v_0 t \Rightarrow \theta = \frac{v_0 t}{R}$$

Pero recordamos que $\theta \neq \phi$, así que no nos sirve para la ecuación de velocidad.



Por formar un ángulo recto entre θ y ϕ, tenemos

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \phi$$

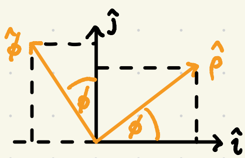
reemplazando en la condición de rodar sin resbalar

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{v_0 t}{R} \Rightarrow \dot{\phi} = -\frac{v_0}{R}$$

tenemos finalmente la velocidad

$$\dot{\vec{r}}_c = R\left(-\frac{v_0}{R}\right)\hat{\phi} = -v_0\hat{\phi} = \dot{\vec{r}}_c$$

b) Ahora, como queremos expresar $\vec{r}$ y $\vec{v}$ de P con respecto a O, nos conviene transformar las coordenadas a cartesianas. Para ello, recordamos que



$$\hat{\rho} = \cos\phi\,\hat{\imath} + \sin\phi\,\hat{\jmath}$$

$$\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{\imath} + \cos\phi\,\hat{\jmath}$$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

Reemplazando $\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{v_0 t}{R}$

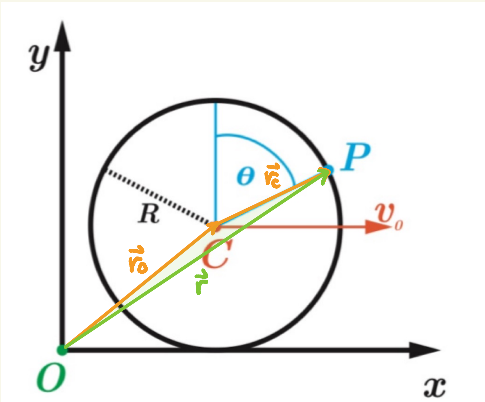
$$\hat{\rho} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{v_0 t}{R}\right)\hat{\imath} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{v_0 t}{R}\right)\hat{\jmath} = \sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\hat{\imath} + \cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\hat{\jmath}$$

$$\hat{\phi} = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{v_0 t}{R}\right)\hat{\imath} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{v_0 t}{R}\right)\hat{\jmath} = -\cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\hat{\imath} + \sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\hat{\jmath}$$

Luego

$$\vec{r}_c = R\left[\sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\hat{\imath} + \cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\hat{\jmath}\right]$$

$$\vec{v}_c = -v_0\left[-\cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\hat{\imath} + \sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\hat{\jmath}\right] = v_0\left[\cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\hat{\imath} - \sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\hat{\jmath}\right]$$



Ahora, para expresar P con respecto a O, usamos suma de vectores.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_c$$

donde $\vec{r}_0$ es la posición de C con respecto a O, en este caso,

$$\vec{r}_0 = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} = v_0 t\,\hat{\imath} + R\,\hat{\jmath}$$

Así, la posición es

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_c = v_0 t\,\hat{\imath} + R\hat{\jmath} + R\left[\sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\hat{\imath} + \cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\hat{\jmath}\right]$$

$$\vec{r} = \left[v_0 t + R\sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\right]\hat{\imath} + \left[R + R\cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\right]\hat{\jmath}$$

derivamos para obtener $\vec{v}$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left\{\left[v_0 t + R\sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\right]\hat{\imath} + \left[R + R\cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\right]\hat{\jmath}\right\}$$

$$= \left[v_0 + \cancel{R}\frac{v_0}{\cancel{R}}\cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\right]\hat{\imath} - \cancel{R}\frac{v_0}{\cancel{R}}\sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\hat{\jmath}$$

$$\vec{v} = \left[v_0 + v_0\cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\right]\hat{\imath} - v_0\sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\hat{\jmath}$$

c) La velocidad angular está dada por

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{r}\times\vec{v}}{\|\vec{r}\|^2}$$

calculamos

$$\|\vec{r}\|^2 = \sqrt{\left[v_0 t + R\sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\right]^2 + \left[R + R\cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\right]^2}^{\,2}$$

$\sin^2(\cdot) + \cos^2(\cdot) = 1$

$$= v_0^2 t^2 + 2Rv_0 t\sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right) + \underline{R^2\sin^2\left(\frac{v_0 t}{R}\right)} + R^2 + 2R^2\cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right) + \underline{R^2\cos^2\left(\frac{v_0 t}{R}\right)}$$

$$= v_0^2 t^2 + 2R^2 + 2R\left[v_0 t\sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right) + R\cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\right]$$

Siguiendo... (recordamos que $\hat{\imath}\times\hat{\imath}=0=\hat{\jmath}\times\hat{\jmath}$, $\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}$, $\hat{\jmath}\times\hat{\imath}=-\hat{k}$)

$$\vec{r}\times\vec{v}=\left\{\left[v_0t+R\sin\left(\frac{v_0t}{R}\right)\right]\hat{\imath}+\left[R+R\cos\left(\frac{v_0t}{R}\right)\right]\hat{\jmath}\right\}\times\left\{\left[v_0+v_0\cos\left(\frac{v_0t}{R}\right)\right]\hat{\imath}-v_0\sin\left(\frac{v_0t}{R}\right)\hat{\jmath}\right\}$$

$$=\left[v_0t+R\sin\left(\frac{v_0t}{R}\right)\right]\left[-v_0\sin\left(\frac{v_0t}{R}\right)\right]\hat{\imath}\times\hat{\jmath}+\left[R+R\cos\left(\frac{v_0t}{R}\right)\right]\left[v_0+v_0\cos\left(\frac{v_0t}{R}\right)\right]\hat{\jmath}\times\hat{\imath}$$

$$=\left[-v_0^2t\sin\left(\frac{v_0t}{R}\right)-Rv_0\underline{\sin^2\left(\frac{v_0t}{R}\right)}\right]\hat{k}-\left[Rv_0+2Rv_0\cos\left(\frac{v_0t}{R}\right)+Rv_0\underline{\cos^2\left(\frac{v_0t}{R}\right)}\right]\hat{k}$$

$$=-\left\{Rv_0+v_0^2t\sin\left(\frac{v_0t}{R}\right)+2Rv_0\cos\left(\frac{v_0t}{R}\right)+Rv_0\left[\cancel{\sin^2\left(\frac{v_0t}{R}\right)+\cos^2\left(\frac{v_0t}{R}\right)}^{\,1}\right]\right\}\hat{k}$$

$$=-\left\{v_0^2t\sin\left(\frac{v_0t}{R}\right)+Rv_0\left[2+2\cos\left(\frac{v_0t}{R}\right)\right]\right\}\hat{k}$$

juntando todo (al fin)

$$\boxed{\vec{\omega}=\frac{\vec{r}\times\vec{v}}{\|\vec{r}\|^2}=\frac{-\left\{v_0^2t\sin\left(\frac{v_0t}{R}\right)+Rv_0\left[2+2\cos\left(\frac{v_0t}{R}\right)\right]\right\}}{v_0^2t^2+2R^2+2R\left[v_0t\sin\left(\frac{v_0t}{R}\right)+R\cos\left(\frac{v_0t}{R}\right)\right]}\hat{k}}\ //$$