Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2001 – Mecánica

Auxiliar 2

Coordenadas cilíndricas y esféricas

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

P1.-

Considere una curva espiral descrita **en coordenadas esféricas** por las ecuaciones:

$$r = R\,, \quad \phi = N\theta\,,$$

donde R y N son constantes conocidas (N entero par). Una partícula se mueve sobre la espiral partiendo desde el extremo superior ($\theta = 0$) y manteniendo una velocidad angular cenital constante y conocida, $\dot{\theta} = \omega_0$. Se pide:

a) Utilizando coordenadas esféricas, escriba los vectores velocidad y aceleración para una posición arbitraria de la partícula sobre su trayectoria.

b) Encuentre una expresión para la longitud total de la espiral y para el tiempo que la partícula tarda en recorrerla. **Indicación**: De ser difícil de calcular, puede dejar expresada la integral.

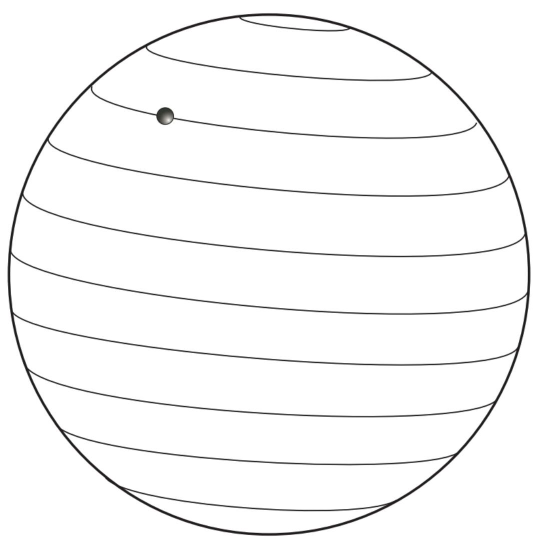


Figura 1: Pregunta 1

P2.- Viaje al centro de la tierra

Suponga que es posible excavar un túnel entre dos puntos A y B de la Tierra, como se muestra en la Figura 2. La aceleración de gravedad (que apunta hacia el centro de la Tierra) al interior del túnel tiene una magnitud que es proporcional a la distancia r desde el centro de la Tierra:

$$|\vec{a}| = \frac{g}{R} r,$$

donde g es la aceleración de gravedad en la superficie de la Tierra y R es el radio de la Tierra. Asumiendo que un vehículo parte del reposo en el punto A y se mueve sin roce en el interior del túnel, bajo el efecto de la gravedad, calcule:

a) El tiempo que requiere para llegar al punto B, que está a una distancia R del punto A, en línea recta

b) La rapidez máxima del movimiento resultante

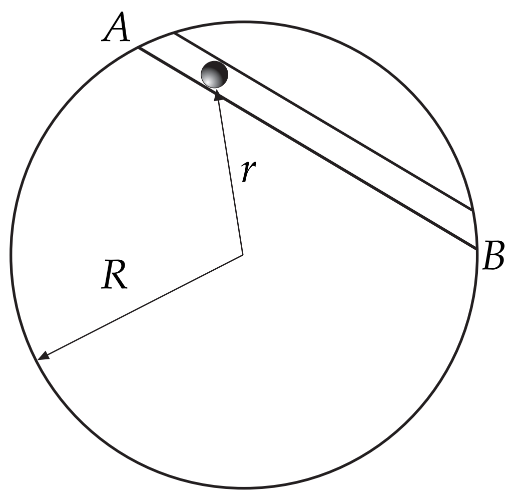


Figura 2: Pregunta 2

P3.- El problema del pescador

Luego de un largo día de trabajo, un pescador se dispone a la peligrosa misión diaria de cruzar un río de ancho D, partiendo desde A e intentando llegar al punto O en la orilla opuesta. El agua del río tiene una velocidad constante $\vec{v}_0$ en todo su ancho, por lo que el pescador debe remar con una velocidad $\vec{v}_p$ **relativa al agua** y siempre apuntando a O como se observa en la Figura 3.

a) Usando coordenadas polares determine las ecuaciones de $\dot{\theta}$ y $\dot{r}$ en función de r, θ, v_0 y v_p. Con estas ecuaciones exprese $\frac{dr}{d\theta}$ en función de los mismos parámetros.

b) Integre la expresión de a) para encontrar la trayectoria en función de θ, D y las velocidades enunciadas, ¿qué condición debe cumplir v_p para que el pescador pueda llegar a O?

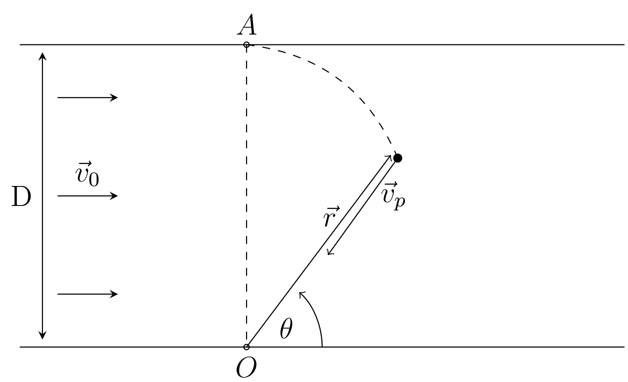


Figura 3: Pregunta 3

Formulario

Coordenadas cilíndricas

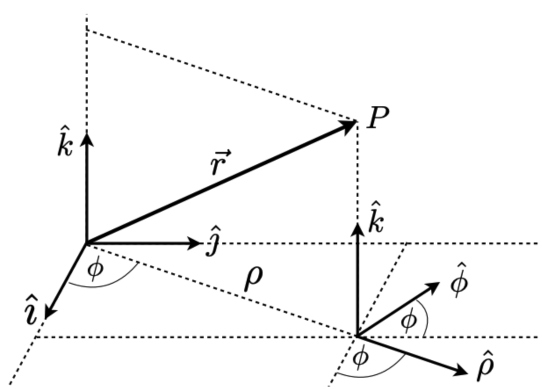
La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas cilíndricas** están dados por:

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \\
\vec{v} &= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k} \\
\vec{a} &= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k} \\
&= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho^2\dot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}
\end{aligned}
$$

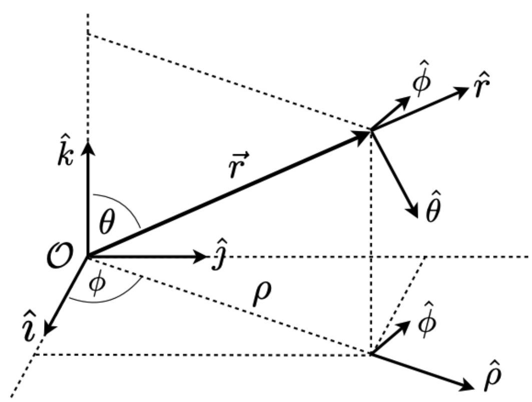
Coordenadas esféricas

La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas esféricas** están dados por:

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= r\hat{r} \\
\vec{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi} \\
\vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{\phi} \\
&= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathrm{d}(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta)}{\mathrm{d}t}\hat{\phi}
\end{aligned}
$$



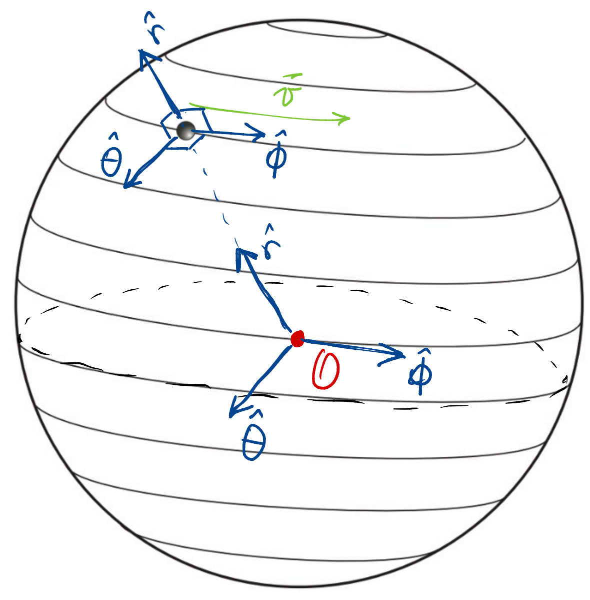
(a) Coord. cilíndricas



(b) Coord. esféricas

Auxiliar 2

P1



a) Debemos reemplazar en las expresiones en coordenadas esféricas de la velocidad

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\phi}$$

y la aceleración

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r}$$
$$+ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta}$$
$$+ (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)\hat{\phi}$$

Ojo que nos dicen que quede en función de la posición (no el tiempo), así que dejaremos todo en función de θ (la única variable que dejaremos). Calculamos

- $r = R \Rightarrow \dot{r} = 0 \Rightarrow \ddot{r} = 0 \quad \forall$ toda posición
- $\phi = N\theta \Rightarrow \dot{\phi} = N\dot{\theta} = N\omega_0 \Rightarrow \ddot{\phi} = N\ddot{\theta} = 0$
- $\dot{\theta} = \omega_0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

reemplazamos

- $\vec{v} = \overset{\dot{r}}{0}\cdot\hat{r} + \overset{r\dot{\theta}}{R\cdot\omega_0}\hat{\theta} + \overset{r\dot{\phi}\sin\theta}{RN\omega_0\sin\theta}\,\hat{\phi} = R\omega_0\hat{\theta} + RN\omega_0\sin\theta\,\hat{\phi}$

- $\vec{a} = (\overset{\ddot{r}}{0} \overset{-r\dot{\theta}^2}{- R\omega_0^2} \overset{-r\dot{\phi}^2\sin^2\theta}{- RN^2\omega_0^2\sin^2\theta})\hat{r} + (\overset{r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta}{0 + 0 - RN^2\omega_0^2\sin\theta\cos\theta})\hat{\theta} + (\overset{r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta}{0 + 0 + 2RN\omega_0^2\cos\theta})\hat{\phi}$

$$= (-R\omega_0^2 - RN^2\omega_0^2\sin^2\theta)\hat{r} - RN^2\omega_0^2\sin\theta\cos\theta\,\hat{\theta} + 2RN\omega_0^2\cos\theta\,\hat{\phi}$$

b) Sabemos que la partícula comienza a moverse en el "polo norte", $\theta = 0$, y para recorrer toda la espiral debe llegar hasta el extremo opuesto: el "polo sur", que se encuentra en $\theta = \pi$.

Además, sabemos que la partícula desciende con rapidez $\dot{\theta} = \omega_0$ en $\hat{\theta}$, que es una EDO de primer orden

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 \quad \Big/ \int_{t_0=0}^{t_f} dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{t_f} \frac{d\theta}{\cancel{dt}}\cancel{dt} = \int_0^{t_f} \omega_0\, dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{\theta(t=0)}^{\theta(t=t_f)} d\theta = \omega_0 \int_0^{t_f} dt$$

donde sabemos que $\theta(t=0)=0$ y $\theta(t=t_f)=\pi$ y ω_0 es cte.

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} d\theta = \omega_0 \int_0^{t_f} dt$$

$$\Leftrightarrow \pi = \omega_0 t_f \qquad \boxed{\therefore\ t_f = \frac{\pi}{\omega_0}}$$

Y para calcular la longitud de la espira usamos la fórmula de distancia recorrida total

$$d_{tot} = \int_{t_0=0}^{t_f} \|\vec{v}(t)\| dt$$

así que calculamos la magnitud de la vel. que encontramos y aprovechamos que $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$ es ortonormal

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi} \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

$$= \sqrt{(v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi})\cdot(v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi})}$$

$$= \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_\phi^2}$$

en nuestro caso particular: $\vec{v} = R\omega_0 \hat{\theta} + RN\omega_0 \sin\theta \hat{\phi}$

$$\Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{R^2\omega_0^2 + R^2N^2\omega_0^2 \sin^2\theta(t)}$$

donde sabemos que $\theta(t) = \omega_0 t$

$$\boxed{\therefore\ d_{tot} = \int_0^{t_f} \sqrt{R^2\omega_0^2 + R^2N^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)}\ dt}$$

P2

a) Aunque nos den la aceleración en coord. esféricas, debido a que el túnel es recto, nos conviene ocupar un sist. cartesiano $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ como el de Fig. 1.

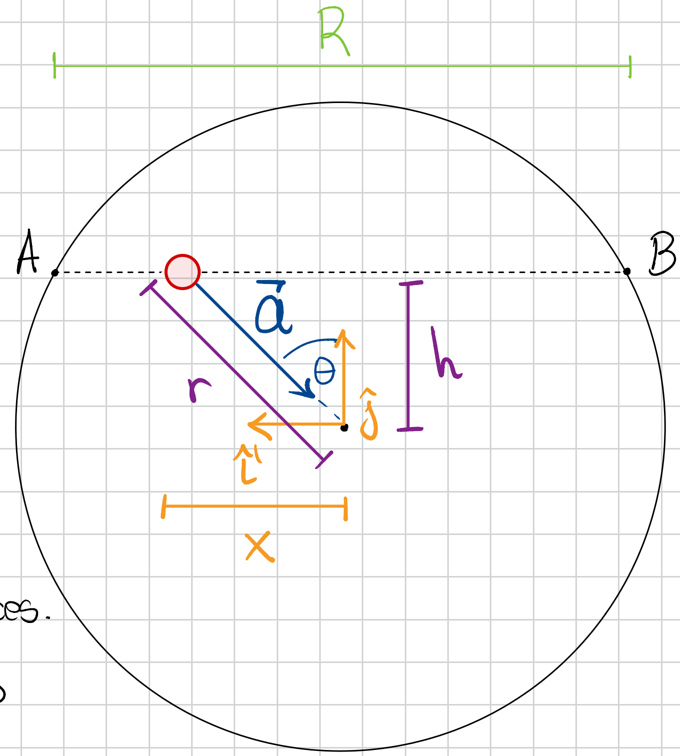


Fig. 1

Para obtener el tiempo solicitado nos gustaría obtener $x = x(t)$, ya que bastaría con despejar t^* de la ec.

$$x(t^*) = x_B$$

con x_B el valor de x cuando la masa está en B.
Por lo tanto, tenemos que conseguir $\ddot{x}$ e integrar dos veces.

Descomponiendo $\vec{a} = -a\hat{r}$ que apunta hacia el centro

$$\vec{a} = -a\sin\theta\,\hat{\imath} - a\cos\theta\,\hat{\jmath}$$

$$= \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} \implies \ddot{x} = -\frac{g}{R} r\sin\theta \quad (1)$$

Para poder integrar necesitamos $\ddot{x}$ como función de x. Hagamos un poco de geometría. Por dibujo sabemos que

$$r = \sqrt{x^2 + h^2}$$

por lo tanto, también

$$\sin\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

así que (1) sería

$$\ddot{x} = -\frac{g}{R}\sqrt{x^2+h^2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} = -\frac{g}{R}x = \ddot{x}(x) \quad (2)$$

Ocupamos truco de mecánica para reescribir la aceleración

$$\ddot{x}(x) = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{g}{R}x \quad \Big/ \int_{R/2}^{x} dx$$

$$\implies \int_0^{\dot{x}} \dot{x}\,d\dot{x} = -\frac{g}{R}\int_{R/2}^{x} x\,dx$$

$$\iff \dot{x}(x) = \pm\sqrt{\frac{g}{R}\left(\frac{R^2}{4} - x^2\right)} \quad (*)$$

que podemos volver a integrar

$$\frac{1}{(R^2/4-x^2)^{1/2}}\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{g}{R}} \quad \Big/ \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \int_{R/2}^{x} \frac{dx}{(R^2/4-x^2)^{1/2}} = \pm\frac{g}{R}\int_0^t dt$$

donde resolvemos la primera integral definiendo

$$x = \frac{R}{2}\sin(u) \rightarrow dx = \frac{R}{2}\cos(u)\,du \quad y \quad u_f = \arcsin\left(\frac{2x}{R}\right), \quad u_0 = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{R/2}^{x} \frac{dx}{(R^2/4-x^2)^{1/2}} = \int_{\pi/2}^{\arcsin(\dots)} \frac{\cos(u)\,du}{\cos(u)} = \arcsin\left(\frac{2x}{R}\right) - \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \arcsin\left(\frac{2x}{R}\right) - \frac{\pi}{2} = \pm\sqrt{\frac{g}{R}}\,t \quad (3)$$

con lo que "obtenemos" una función $x = x(t)$. Ahora, buscamos t^* t.q. $x(t^*) = -R/2$

$$(3) \Rightarrow \arcsin(-1) - \frac{\pi}{2} = -\sqrt{\frac{g}{R}}\,t^*$$

$$\Leftrightarrow -\pi = -\frac{g}{R}t^* \quad \Rightarrow \quad \boxed{t^* = \sqrt{\frac{R}{g}}\,\pi}$$

donde tomamos el signo $-$ porque de $(*)$ sabemos que la velocidad para $-R/2 < x < 0$ tiene que ser negativa.

b) Tomamos la magnitud de $(*)$ y derivamos c/r a x

$$\frac{\partial |\dot{x}|}{\partial x}\bigg|_{x=x^*} = \sqrt{\frac{g}{R}}\cdot\frac{(-x^*)}{\sqrt{R^2/4-x^{*2}}} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x^* \overset{!}{=} 0, \text{ donde se da la rapidez máxima.}$$

Reemplazando x^* en $|\dot{x}|$

$$\boxed{|\dot{x}|(x^*) = |\dot{x}|_{max} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{g}{R}}}$$

P3

a) Hay que tener bien claro los distintos tipos de velocidades. La superficie del río se mueve con una velocidad homogénea $\vec{v}_0$ c/r a las orillas (como las cintas caminadoras del aeropuertos, usadas para recorrerlo más rápido) y el pescador se mueve sobre el río con una velocidad $\vec{v}_p$ c/r al río, no c/r a la orilla (como un pasajero caminando sobre la cinta caminadora).

Por lo tanto, alguien en la orilla ve al pescador moverse con velocidad

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_p$$

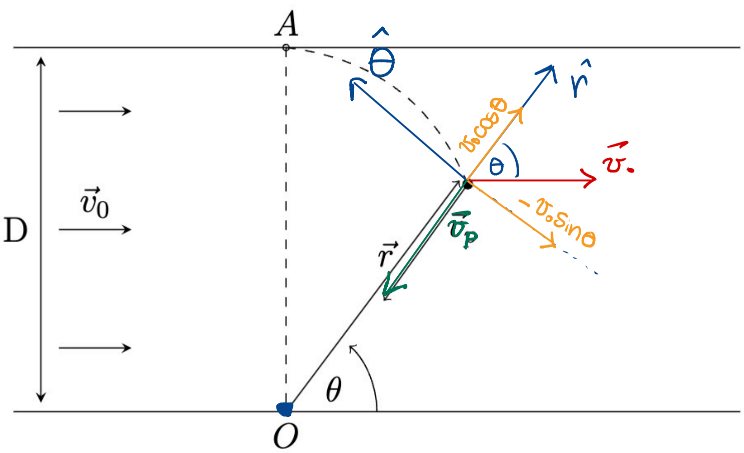
c/r a la orilla. Ahora necesitamos las expresiones de estas velocidades en algún sist. de coord.. Como el movimiento es curvo y en un solo plano: elegimos coord. polares (o cilíndricas con $z=0$), centrado en O

Geométricamente encontramos que en este sist.

▷ $\vec{v}_0 = v_0\cos\theta\,\hat{r} - v_0\sin\theta\,\hat{\theta}$

▷ $\vec{v}_p = -v_p\,\hat{r}$

$\therefore\ \vec{v} = (v_0\cos\theta - v_p)\hat{r} - v_0\sin\theta\,\hat{\theta}$ (1)



Nosotros sabemos que cualquier velocidad en polares (cilíndricas) se escribe como

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} \quad (2)$$

y como cada componente es independiente, identificamos los términos de (1) y (2)

$$\Rightarrow \dot{r} = v_0\cos\theta - v_p \quad \wedge \quad r\dot{\theta} = -v_0\sin\theta \quad (3)$$

con lo que obtenemos lo primero que nos piden.

Ahora, necesitamos $dr/d\theta$. Lógicamente la distancia radial, r, depende de la posición angular, θ, así que podemos hacer la siguiente regla de la cadena:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}$$

así que usando (3)

$$\boxed{\frac{dr}{d\theta} = -r\,\frac{(v_0\cos\theta - v_p)}{v_0\sin\theta}} \quad (4)$$

b) Queremos obtener $r = r(\theta)$, así que integramos (4)

$$\frac{dr}{r} = \frac{(v_p - v_0 \cos\theta)\, d\theta}{v_0 \sin\theta}$$

$$\Rightarrow \int_{r_0}^{r(\theta)} \frac{dr}{r} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(v_p - v_0 \cos\theta)}{v_0 \sin\theta}\, d\theta$$

donde $r_0 = r(t=0)$ y $\theta_0 = \theta(t=0)$, que por dibujo y enunciado sabemos que

$$r_0 = D \quad \wedge \quad \theta_0 = \pi/2$$

integramos

$$\int_{D}^{r(\theta)} \frac{dr}{r} = \frac{v_p}{v_0} \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin\theta} - \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\, d\theta$$

$$\ln\left(\frac{r}{D}\right) = \frac{v_p}{v_0} \ln\left(\frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\theta} - \ln(\sin\theta)\Big|_{\pi/2}^{\theta}$$

$$\ln\left(\frac{r}{D}\right) = \ln\left(\frac{[\tan(\theta/2)]^{v_p/v_0}}{\sqrt{2}\sin\theta}\right)$$

$$\therefore r(\theta) = \frac{[\tan(\theta/2)]^{v_p/v_0}}{\sqrt{2}\cdot\sin\theta} \quad (5)$$

Para que el pescador llegue a O se necesita que $r = 0$ para $\theta = 0$ (ver dibujo). Sin embargo, por (5) vemos que $\sin(\theta \to 0) = 0$ lo que haría que $r \to \infty$ (se lo lleva la corriente), pero $\tan(\theta/2) \to 0$ cuando $\theta \to 0$, así que para que r vaya a 0, el numerador debe decrecer más rápido que el denominador. Esto lo logramos con

$$v_p / v_0 \gg 1 \quad (\text{o sea, muy grande})$$

$$\Leftrightarrow v_p \gg v_0$$

O sea, que la rapidez de remo debe ser mucho más rápida que la rapidez de la corriente, lo que tiene mucho sentido.