Auxiliar 3

Velocidad angular y Coordenadas intrínsecas

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

P1.-

La trayectoria de un punto P, en coordenadas cilíndricas, se define con:

$$\rho(t) = \rho_0 \qquad \theta(t) = ? \qquad z(t) = h - B\theta(t)$$

Se sabe que $\theta(t)$ es una función monótona, $\theta(0) = 0$ y que $\dot{\theta}(0) = \omega_0$ y donde h, B y ω_0 son constantes positivas conocidas.

(a) Obtenga las expresiones para los vectores velocidad y aceleración en este ejemplo.

(b) Obtenga una expresión para el vector tangente $\hat{\mathrm{t}}$ y para la rapidez de P. Comente sobre los signos de estas cantidades.

(c) Obtenga expresiones para las aceleraciones centrípeta y tangencial:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{cent}(t) + \vec{a}_{tg}(t)$$

(d) ¿Cuál es la función $\theta(t)$ si se sabe que la aceleración apunta todo el tiempo perpendicular al eje Z?

P2.-

Una barra rígida de largo L se mueve apoyada en dos paredes rígidas que forman un ángulo recto entre ellas. Suponer que el ángulo $\theta = \theta(t)$ es una función arbitraria del tiempo. A partir de esto se pide:

(a) Demostrar que la distancia del centro de la barra con respecto al punto de intersección de las paredes es constante en todo el movimiento.

(b) Encontrar: $\vec{r}(t)$, $\dot{\vec{r}}(t)$ y $\ddot{\vec{r}}(t)$ en coordenadas polares. Siendo $\vec{r}(t)$ la posición del centro de la barra con respecto al origen.

(c) Encontrar el radio de curvatura e interpretar el resultado.

(d) Si la barra parte desde una posición vertical y el extremo inferior se mueve a una rapidez v_0 alejándose de la pared, encontrar $\theta(t)$.

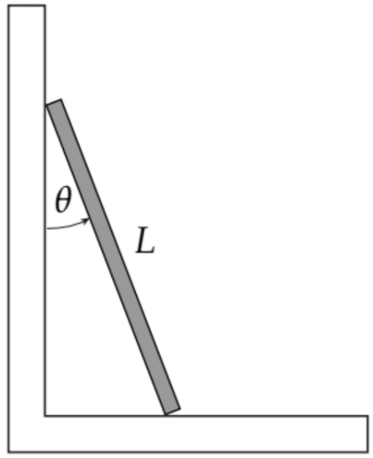

Figura 1: Pregunta 2

P3.-

Un disco de radio R rueda sin resbalar por un suelo horizontal. Su centro C tiene velocidad constante $\vec{v} = v_0\hat{x}$, y parte desde el reposo.

(a) Calcule $\vec{v}(t)$ y $\vec{r}(t)$ de cualquier punto P sobre el borde del disco con respecto a C, en la base de coordenadas cilíndricas.

(b) Calcule $\vec{v}(t)$ y $\vec{r}(t)$ de P con respecto a O.

(c) Calcule la velocidad angular de P, con respecto a O.

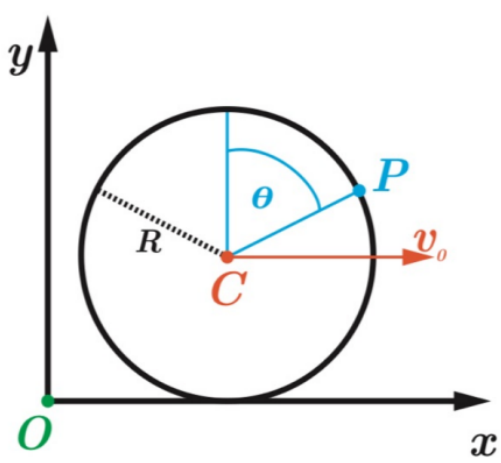

Figura 2: Pregunta 3

Formulario

Velocidad angular

Se define la **rapidez angular** como el ángulo barrido por $\vec{r}$ por unidad de tiempo, con respecto al origen de un sistema de coordenadas O, esto es:

$$\omega_O \equiv \frac{||\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)||}{||\vec{r}(t)||^2}$$

A partir de aquello, se define el vector **velocidad angular**, desde el origen de un sistema de coordenadas O como:

$$\vec{\omega}_O \equiv \frac{\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)}{||\vec{r}(t)||^2}$$

donde $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ son los vectores posición y velocidad, respectivamente.
De forma general, se define el vector velocidad angular para un vector $\vec{A}(t)$ como:

$$\vec{\omega}_A \equiv \frac{1}{||\vec{A}||^2}\vec{A} \times \frac{d\vec{A}}{dt}$$

Del cual, se puede llegar como resultado a una expresión general sobre cambio del vector $\vec{A}$ en el tiempo:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \hat{\text{A}}\frac{d}{dt}||\vec{A}|| + \vec{\omega}_A \times \vec{A}$$

donde $\hat{\text{A}} = \frac{\vec{A}}{||\vec{A}||}$ es el vector unitario que apunta en la dirección $\vec{A}$. De esta manera, el primer término nos describe cómo cambia el largo de $\vec{A}$, mientras que el segundo término describe el ritmo de giro de $\vec{A}$.

Coordenadas intrínsecas

Se definen los **vectores tangente** $\hat{t}$ y **normal** $\hat{n}$ a la trayectoria como:

$$\hat{t} \equiv \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} \qquad \hat{n} \equiv \left\| \frac{d\hat{t}}{dt} \right\|^{-1} \frac{d\hat{t}}{dt}$$

La velocidad angular del vector tangencial queda dada por:

$$\vec{\omega}_{\hat{t}} \equiv \left\| \frac{d\hat{t}}{dt} \right\| \hat{t} \times \hat{n}$$

Luego, la **velocidad** y **aceleración** expresada en este sistema de coordenadas intrínsecas, es:

$$\vec{v} = v\hat{t} \qquad \vec{a} = \dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho_c}\hat{n}$$

donde $v = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$ y $\rho_c = \frac{v}{\omega_{\hat{t}}}$ es el llamado **radio de curvatura**, y denota el radio de la circunferencia con centro C, alrededor de la cual la partícula gira en el instante t.

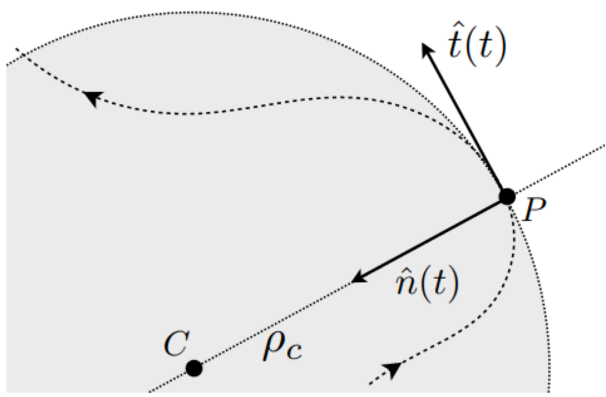

Figura 3: Coordenada intrínseca