

Auxiliar 2

Coordenadas cilíndricas y esféricas

Profesor: Gonzalo Palma

Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

P1.-

Considere una curva espiral descrita **en coordenadas esféricas** por las ecuaciones:

$$r = R, \quad \phi = N\theta,$$

donde R y N son constantes conocidas (N entero par). Una partícula se mueve sobre la espiral partiendo desde el extremo superior ($\theta = 0$) y manteniendo una velocidad angular cenital constante y conocida, $\dot{\theta} = \omega_0$. Se pide:

- Utilizando coordenadas esféricas, escriba los vectores velocidad y aceleración para una posición arbitraria de la partícula sobre su trayectoria.
- Encuentre una expresión para la longitud total de la espiral y para el tiempo que la partícula tarda en recorrerla. **Indicación:** De ser difícil de calcular, puede dejar expresada la integral.

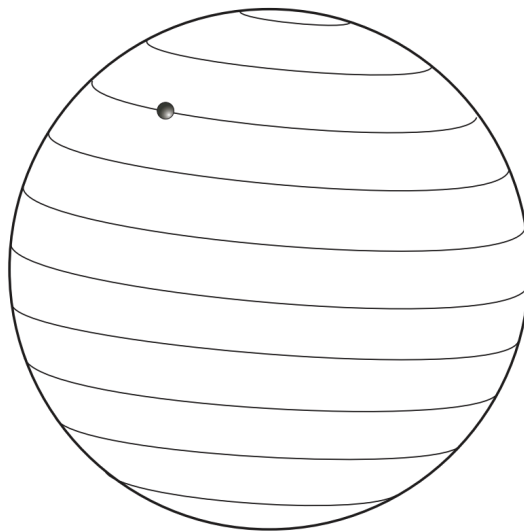


Figura 1: Pregunta 1

P2.- Viaje al centro de la tierra

Suponga que es posible excavar un túnel entre dos puntos A y B de la Tierra, como se muestra en la Figura 2. La aceleración de gravedad (que apunta hacia el centro de la Tierra) al interior del túnel tiene una magnitud que es proporcional a la distancia r desde el centro de la Tierra:

$$|\vec{a}| = \frac{g}{R}r,$$

donde g es la aceleración de gravedad en la superficie de la Tierra y R es el radio de la Tierra. Asumiendo que un vehículo parte del reposo en el punto A y se mueve sin roce en el interior del túnel, bajo el efecto de la gravedad, calcule:

- El tiempo que requiere para llegar al punto B , que está a una distancia R del punto A , en línea recta
- La rapidez máxima del movimiento resultante

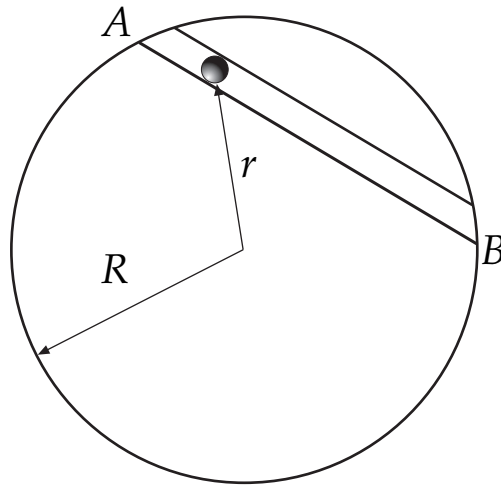


Figura 2: Pregunta 2

P3.- El problema del pescador

Luego de un largo día de trabajo, un pescador se dispone a la peligrosa misión diaria de cruzar un río de ancho D , partiendo desde A e intentando llegar al punto O en la orilla opuesta. El agua del río tiene una velocidad constante $\vec{v}_0$ en todo su ancho, por lo que el pescador debe remar con una velocidad $\vec{v}_p$ **relativa al agua** y siempre apuntando a O como se observa en la Figura 3.

- Usando coordenadas polares determine las ecuaciones de $\dot{\theta}$ y $\dot{r}$ en función de r , θ , v_0 y v_p . Con estas ecuaciones exprese $\frac{dr}{d\theta}$ en función de los mismos parámetros.
- Integre la expresión de a) para encontrar la trayectoria en función de θ , D y las velocidades enunciadas, ¿qué condición debe cumplir v_p para que el pescador pueda llegar a O ?

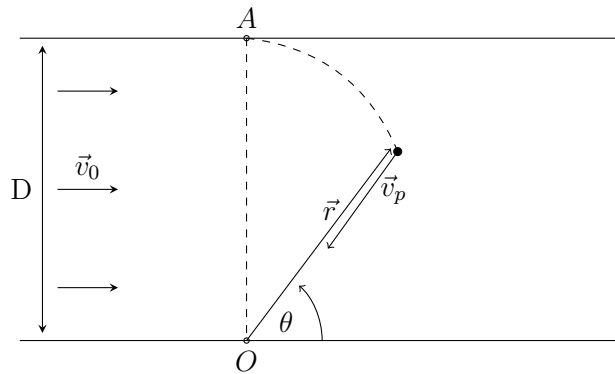


Figura 3: Pregunta 3

Formulario

Coordenadas cilíndricas

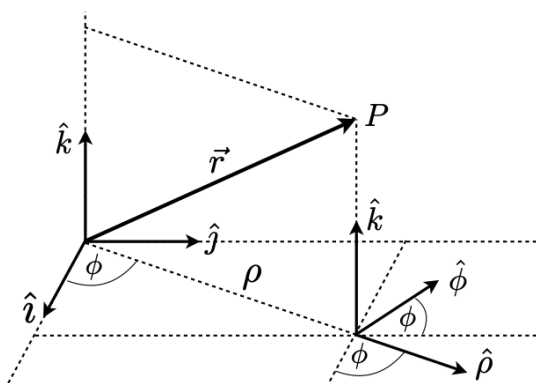
La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas cilíndricas** están dados por:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \rho \hat{\rho} + z \hat{k} \\ \vec{v} &= \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{k} \\ \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{\rho} + (2\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \hat{\phi} + \ddot{z} \hat{k} \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\phi}) \hat{\phi} + \ddot{z} \hat{k}\end{aligned}$$

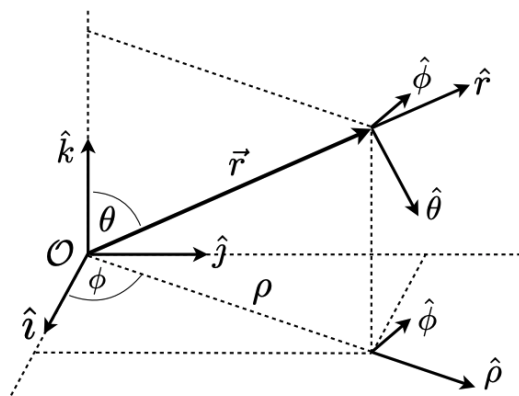
Coordenadas esféricas

La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas esféricas** están dados por:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r \hat{r} \\ \vec{v} &= \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \dot{\phi} \sin \theta \hat{\phi} \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{r} + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{\theta} + (r \ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta) \hat{\phi} \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{r} + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d(r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta)}{dt} \hat{\phi}\end{aligned}$$



(a) Coord. cilíndricas



(b) Coord. esféricas