

Auxiliar 1

Cinemática y sistemas de coordenadas

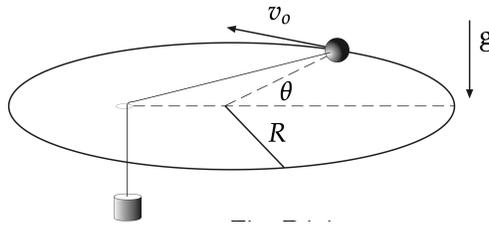
Profesor: Gonzalo Palma

Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

P1.- Coordenadas cartesianas

Una partícula se mueve con rapidez v_0 constante, sobre un riel circular de radio R colocado en posición horizontal sobre una superficie también horizontal. La partícula se encuentra atada mediante una cuerda inextensible a un bloque que cuelga debajo de un agujero localizado a una distancia $R/2$ del centro del riel. Suponga que v_0 es suficientemente pequeño para que la cuerda no se destense.

- Determina la rapidez del bloque en función del ángulo θ
- Obtenga la rapidez máxima del bloque
- Determine la aceleración \vec{a} del bloque cuando la partícula que se mueve sobre el riel pasa por la posición $\theta = 0$



P2.- Coordenadas cilíndricas

Se observa una partícula en movimiento cuya trayectoria está dada por las siguientes funciones:

$$\rho = Ae^{k\theta}, \quad z = h\rho$$

donde ρ , θ y z son las respectivas coordenadas cilíndricas (con A , k , h positivos). Suponiendo que su rapidez es constante (v_0) y conocida:

- Calcule la velocidad \vec{v} de la partícula en función de θ , A , k , h y v_0
- Encuentre su aceleración \vec{a} en función de los mismos parámetros
- Pruebe que $\vec{a} \perp \vec{v}$
- Encuentre una expresión para $\theta(t)$

Formulario

Coordenadas cartesianas

La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas cartesianas** están dados por:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

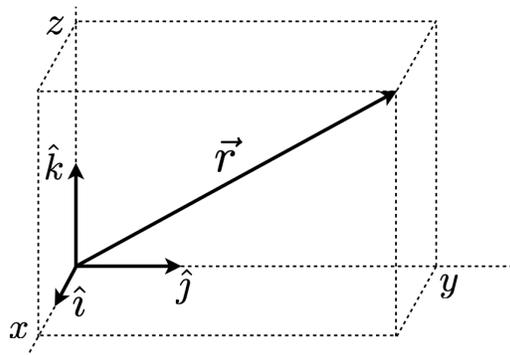
Coordenadas cilíndricas

La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas cilíndricas** están dados por:

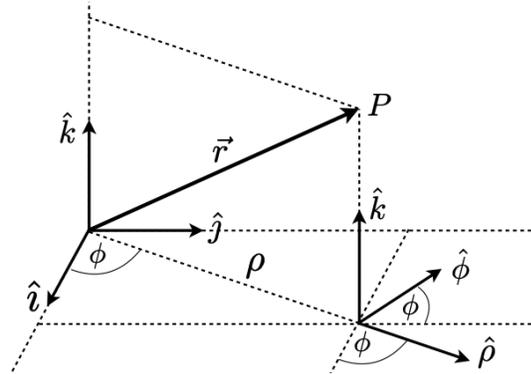
$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k} \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}\end{aligned}$$



(a) Coord. cartesianas



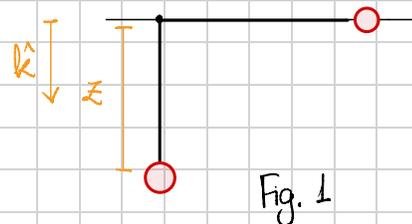
(b) Coord. cilíndricas

Auxiliar 1

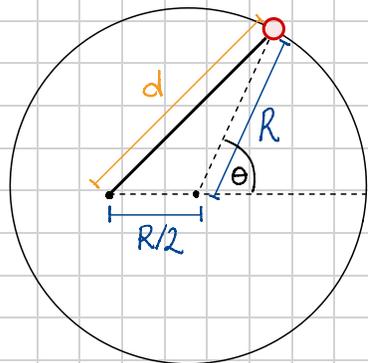
P1

a) Para encontrar la velocidad, y con ello la rapidez, de la masa suspendida podemos definir un sist. de coord. cartesiano como el que se encuentra en Fig. 1. De esta forma,

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$
$$= \dot{z}\hat{k}, \text{ ya que solo sube y baja.}$$



Y nosotros queremos $v = v(\theta)$, o, que es lo mismo, $\dot{z} = \dot{z}(\theta)$. Para esto tendremos que relacionar el mov. de ambas partículas.



Por un momento, asumamos que el largo de la cuerda es L , constante al ser inextensible. Por lo tanto, según Fig. 1 y 2, tendríamos

$$L = z(t) + d(t) \quad (1)$$

y d lo podemos encontrar en función de θ usando teo. del coseno

$$d^2 = (R/2)^2 + R^2 - 2(R/2)R \cos(\pi - \theta)$$

$$= 5R^2/4 + R^2 \cos \theta$$

$$\Rightarrow d(\theta) = R\sqrt{5/4 + \cos \theta} \quad (2)$$

Juntando (1) y (2) obtenemos

$$z = L - d = L - R\sqrt{5/4 + \cos \theta}$$

así que para obtener \dot{z} simplemente derivamos esta expresión

$$\dot{z} = \frac{-R \sin \theta \dot{\theta}}{2\sqrt{5/4 + \cos \theta}} \quad (3) \text{ (desapareció } L!)$$

donde nos faltaría obtener $\dot{\theta} = \dot{\theta}(\theta)$. La velocidad de la partícula en el aro es

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta}$$

pero como se mueve en un círculo: $\dot{\rho} = 0 \Rightarrow \vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta} \Rightarrow |\vec{v}| = R\dot{\theta}$, la rapidez. Además, por enunciado sabemos que se mueve con rapidez v_0 constante, o sea,

$$R\ddot{\theta} = v_0 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_0}{R}$$

Reemplazando en (3)

$$|\dot{\vec{z}}| = \frac{v_0 \sin \theta}{\sqrt{5+4\cos \theta}} \quad (*)$$

b) Simplemente derivamos (*) c/r a θ e igualamos a 0 para obtener el ángulo θ^* donde se da la rapidez máxima (o mínima)

$$\frac{d|\dot{\vec{z}}|}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta^*} = \frac{v_0 \cos \theta^*}{\sqrt{5+4\cos \theta^*}} + \frac{4v_0 \sin^2 \theta^*}{2(5+4\cos \theta^*)^{3/2}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \cos \theta^* (5+4\cos \theta^*) + 2\sin^2 \theta^* \stackrel{!}{=} 0 \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow 5\cos \theta^* + 4\cos^2 \theta^* + 2 - 2\cos^2 \theta^* \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 \theta^* + 5\cos \theta^* + 2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \cos \theta^* = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4} \Rightarrow \frac{-1}{2} \text{ o } -2$$

Ignorando la solución $\cos \theta^* = 2$ y usando (4)

$$\frac{\sin \theta^*}{\sqrt{5+4\cos \theta^*}} = \sqrt{\frac{-\cos \theta^*}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

por lo que la rapidez máxima sería

$$|\dot{\vec{z}}|_{\text{máx}} = \frac{v_0}{2}$$

c) En este caso $\vec{a} = \ddot{\vec{z}}\hat{k}$, así que derivamos (3)

$$\ddot{\vec{z}} = -\frac{v_0 \cos \theta \dot{\theta}}{\sqrt{5+4\cos \theta}} - \frac{v_0 \sin^2 \theta \dot{\theta}}{2(5+4\cos \theta)^{3/2}}$$

$$= -\frac{v_0^2 \cos \theta}{R\sqrt{5+4\cos \theta}} - \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2R(5+4\cos \theta)^{3/2}}$$

que evaluado en $\theta=0$ es

$$\ddot{\vec{z}}(0) = -\frac{v_0^2}{3R} \Rightarrow \vec{a}(0) = -\frac{v_0^2}{3R}\hat{k}$$

P2

a) En coordenadas cilíndricas la velocidad es:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k}$$

así que derivamos: $\dot{\rho} = Ake^{k\theta}\dot{\theta}$, $\dot{z} = h\dot{\rho} = Akhe^{k\theta}\dot{\theta}$

$$\Rightarrow \vec{v} = Ake^{k\theta}\dot{\theta}\hat{\rho} + Ae^{k\theta}\dot{\theta}\hat{\theta} + Akhe^{k\theta}\dot{\theta}\hat{k} \quad (1)$$

Nos piden que \vec{v} no nos quede como función de $\dot{\theta}$, así que ocupamos que la rapidez es v_0 constante. Entonces, tomando la magnitud de (1) e igualando a v_0 .

$$|\vec{v}| \equiv \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{A^2 k^2 e^{2k\theta} \dot{\theta}^2 + A^2 e^{2k\theta} \dot{\theta}^2 + A^2 k^2 h^2 e^{2k\theta} \dot{\theta}^2}$$

$$= Ae^{k\theta} \dot{\theta} \sqrt{k^2 + 1 + k^2 h^2} \stackrel{!}{=} v_0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_0 e^{-k\theta}}{A \sqrt{k^2 + 1 + k^2 h^2}} \quad (2)$$

Reemplazamos en (1)

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{v_0}{\sqrt{k^2 + 1 + k^2 h^2}} [k\hat{\rho} + \hat{\theta} + kh\hat{k}] \quad (*)$$

b) Para encontrar \vec{a} simplemente hay que derivar \vec{v} c/r a tiempo. Recordemos que $\{\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{k}\}$ dependen de la posición de la partícula, por lo tanto del tiempo también. En concreto

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = \dot{\theta} \hat{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \hat{\theta} = -\dot{\theta} \hat{\rho}, \quad \frac{d}{dt} \hat{k} = \vec{0}$$

Así que, derivando (*),

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{v_0}{\sqrt{k^2 + 1 + k^2 h^2}} [-\dot{\theta} \hat{\rho} + \dot{\theta} k \hat{\theta}]$$

$$= \frac{v_0^2 e^{-k\theta}}{A(k^2 + 1 + k^2 h^2)^{3/2}} [-\hat{\rho} + k \hat{\theta}] \quad (**)$$

c) Dos vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son perpendiculares si $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$. Hagamos el producto punto

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{v_0^3 e^{-k\theta}}{A(k^2 + 1 + k^2 h^2)^{3/2}} [-\hat{\rho} + k \hat{\theta}] \cdot [k\hat{\rho} + \hat{\theta} + kh\hat{k}] \propto [-k\hat{\rho} \cdot \hat{\rho} + k\hat{\theta} \cdot \hat{\theta}] = 0 \quad \therefore \vec{a} \perp \vec{v} \quad \forall \theta$$

d) Integremos (2) de la siguiente forma

$$e^{k\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sigma_0}{A\sqrt{k^2 l + k^2 h^2}} \quad / \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta e^{k\theta} d\theta = \frac{\sigma_0}{A\sqrt{k^2 l + k^2 h^2}} \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} e^{k\theta} \Big|_0^\theta = \frac{\sigma_0 t}{A\sqrt{k^2 l + k^2 h^2}}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{\sigma_0 k t}{A\sqrt{k^2 l + k^2 h^2}} - k \right)$$