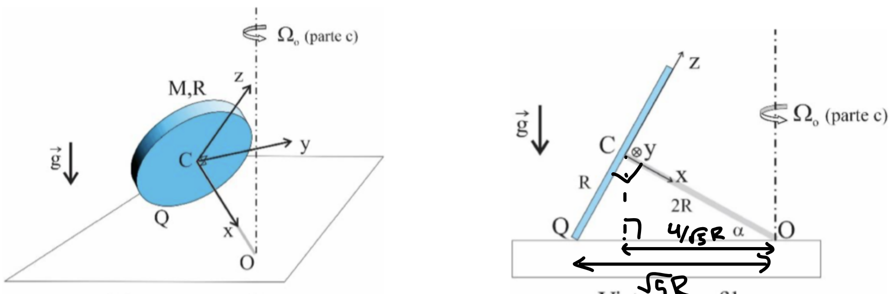
P1.

Un disco homogéneo de masa M y radio R tiene en su centro C soldada una vara de masa despreciable de largo 2R como muestra la figura. El sistema se ubica sobre una superficie horizontal lubricada de manera que no existe ningún roce. El otro extremo de la vara está fijo a un punto O de la superficie, en torno al cual el sistema puede rotar.

a) Si el sistema está en completo reposo sobre la superficie, determine las fuerzas verticales que la superficie ejerce sobre el sistema en el punto O y en el punto Q de contacto entre superficie y disco.

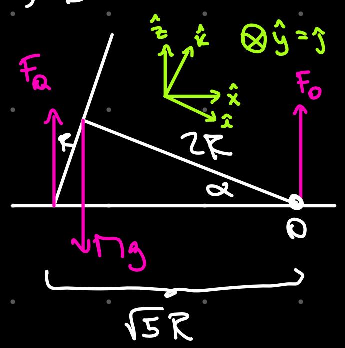
b) Si los momentos de inercia del disco respecto a los ejes x,y,z mostrados en la figura son $I_{xx} = \frac{1}{2}MR^2$, $I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{4}MR^2$, determine los momentos de inercia respecto de ejes x',y',z' paralelos a los anteriores, pero con origen en el punto O.

c) Escriba la ecuación de movimiento del centro de masa y la ecuación de momento angular y torque con respecto a O. Ocupe estas ecuaciones para determinar cada una de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema disco-vara.

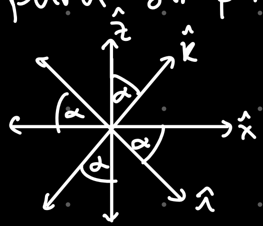


Vista en perspectiva Vista de perfil

a) DCL:



En la figura tenemos direcciones $\hat{k}, \hat{\imath}$ pero para simplificar geometría definimos $\hat{z}, \hat{x}$:



$\hat{z} = \cos\alpha\,\hat{k} - \sin\alpha\,\hat{\imath}$

$\hat{x} = \cos\alpha\,\hat{\imath} + \sin\alpha\,\hat{k}$

$\hat{\imath} = \cos\alpha\,\hat{x} - \sin\alpha\,\hat{z}$

(Notar: $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$, $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$)

$m\vec{A}_{cm} = \sum F_{ext}$, como nos interesan fzas en $\hat{z}$:

$\hat{z})\quad \underbrace{\cancel{m\vec{A}_{cm}\cdot\hat{z}}}_{0,\ \text{no se mueve en } \hat{z}} = F_Q + F_O - mg \quad \Rightarrow \quad F_Q + F_O = mg \quad (1)$

Falta una ecuación (2 incognitas), usamos torque:

$\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_{F_O} + \vec{\tau}_{F_Q} + \vec{\tau}_{mg}$

$\vec{\tau}_{F_O} = \vec{r}\times\vec{F}_O = 0, \quad \vec{r} = 0$

$\vec{\tau}_{F_Q} = \vec{r}\times\vec{F}_Q = -\sqrt{5}R\,\hat{x}\times F_Q\,\hat{z} = +\sqrt{5}R F_Q\,\hat{y} = \sqrt{5}R F_Q\,\hat{\jmath}$

$\vec{\tau}_{mg} = -2R\,\hat{\imath}\times -mg\,\hat{z} = 2R\,\hat{\imath}\times mg(\cos\alpha\,\hat{k} - \sin\alpha\,\hat{\imath})$

$= -2MRg\cos\alpha\,\hat{j}$

Como esta en reposo: $\vec{L}_O = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_O = 0$

$\Rightarrow 0 = -2M\cancel{R}g\cos\alpha + \sqrt{5}\,\cancel{R}F_Q$

$\Rightarrow 2Mg\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}\,F_Q$

$\Rightarrow F_Q = \frac{4}{5}Mg$ (2)

(2) en (1): $F_O = \frac{1}{5}Mg$

b) Usamos Steiner:

$I_{x'x'} = I_{xx} + M(y_{cm}^2 + z_{cm}^2)$, $x_{cm} = 2R$

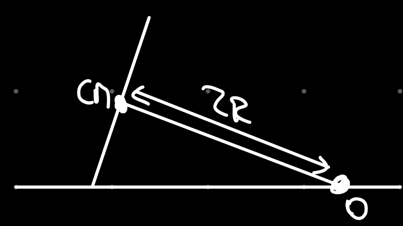
I_{xx}: Momento de inercia en el cm

y_{cm}^2: dist. en la coord. y entre orígenes

z_{cm}^2: Análogo a y pero en z

$y_{cm} = 0$

$z_{cm} = 0$



$\Rightarrow I_{x'x'} = I_{xx} + M\cdot 0 = \frac{1}{2}MR^2$

$I_{y'y'} = I_{yy} + M(x_{cm}^2 + z_{cm}^2) = I_{yy} + M(2R)^2 = \frac{17}{4}MR^2$

$I_{z'z'} = I_{zz} + M(x_{cm}^2 + y_{cm}^2) = I_{zz} + M(2R^2) = \frac{17}{4}MR^2$

c) Ahora como rota $\vec{F}_O = F_{O,x}\hat{x} + F_{O,y}\hat{y} + F_{O,z}\hat{z}$, mientras que en Q es lo mismo pues no hay roce: $\vec{F}_Q = F_Q\hat{z}$

$M\vec{A}_{cm} = \Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{F}_O + \vec{F}_Q + M\vec{g}$

Para $\vec{A}_{cm}$, basta notar que el cm gira en torno a O en un MCU de radio $\frac{4R}{\sqrt{5}} \Rightarrow$ solo hay aceleración centrípeta: $\vec{A}_{cm} = -\Omega^2\frac{4R}{\sqrt{5}}\hat{x}$

$\Rightarrow -\frac{4MR}{\sqrt{5}}\Omega^2 = F_{O,x}$ $\quad 0 = F_{O,y}$ $\quad 0 = F_{O,z} + F_Q - Mg$

$\vec{L}_0 = I_0 \vec{\Omega}$

$$I_0 = \begin{bmatrix} I_{x'x'} & I_{x'y'} & I_{x'z'} \\ I_{y'x'} & I_{y'y'} & I_{y'z'} \\ I_{z'x'} & I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{bmatrix}$$

El disco esta en el plano $yz \Rightarrow x = 0 \therefore I_{x'y'} = I_{x'z'} = I_{y'x'} = I_{z'x'} = 0$

Como el origen esta en linea con el centro del disco, hay simetría c/r al plano $xz \Rightarrow I_{x'z'} = 0 = I_{z'x'}$

$$\Rightarrow I_0 = MR^2 \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 17/4 & 0 \\ 0 & 0 & 17/4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Omega} = \Omega \hat{z} = \Omega(\cos\alpha \hat{k} - \sin\alpha \hat{\imath})$$

$$\Rightarrow \vec{L}_0 = MR^2 \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 17/4 & 0 \\ 0 & 0 & 17/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Omega \sin\alpha \\ 0 \\ \Omega \cos\alpha \end{bmatrix} = MR^2\Omega \begin{bmatrix} -1/2 \sin\alpha \\ 0 \\ 17/4 \cos\alpha \end{bmatrix} = MR^2\Omega \begin{bmatrix} -1/2\sqrt{5} \\ 0 \\ 17/2\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Mientras que el torque es el mismo de a):

$$\vec{\tau}_0 = \left(-\frac{4}{\sqrt{5}} MRg + \sqrt{5} RF_a\right) \hat{\jmath}$$

Preambulo $\boxed{P2}$

Formulas:

λ: Densidad lineal (1 dimensión)

σ: Densidad superficial (2 dimensiones)

ρ: Densidad volumétrica (3 dimensiones)

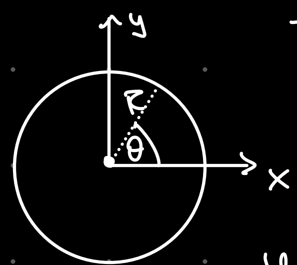
$$\lambda = \frac{Masa}{Largo} \qquad \sigma = \frac{Masa}{Area} \qquad \rho = \frac{Masa}{Volumen}$$

Si la distribución es homogenea:

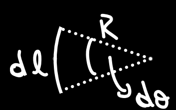
$$\lambda = \frac{dm}{dl} \qquad \sigma = \frac{dm}{dS} \qquad \rho = \frac{dm}{dV}$$

Los diferenciales (dl, dS, dV) conviene sacarlos por geometría.

Anillo: Distribución lineal. El anillo tiene largo (perimetro) $2\pi R \Rightarrow \lambda = \frac{M}{2\pi R}$ $\left(= \frac{M}{2\pi\theta} \right.$ trozo largo $\left.\theta\right)$



dl: diferencial de linea



$$\Rightarrow dl = R d\theta$$

Luego: Para un angulo θ un punto en el anillo esta dado por $x = R\cos\theta \quad y = R\sin\theta \quad z = 0$

$$\Rightarrow I_{xx} = \int (y^2 + \cancel{z^2}^{\,0})\, dm = \int y^2 \overset{cte.}{\lambda}\, dl = \overbrace{\lambda R}^{\frac{M}{2\pi}} \int (R\sin\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{MR^2}{2\pi}\int_0^\theta \sin^2\theta\, d\theta = \frac{MR^2}{4\pi}\int_0^\theta (1-\cos(2\theta))d\theta = \frac{MR^2}{4\pi}\left[\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]\Bigg|_0^\theta$$

$\theta = 2\pi$: $\frac{MR^2}{2}$

Donde $\theta = 2\pi$ para todo el anillo o el angulo hasta donde llegue el trozo

$$I_{yy} = \int (x^2 + \cancel{z^2}) \, dm = \int x^2 \, dm = \int R^2 \cos^2\theta \, (\lambda R \, d\theta)$$

$$= \frac{\Pi R^2}{2\pi} \int_0^\theta \cos^2\theta = \frac{\Pi R^2}{2\pi} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} \right] \left(= \frac{\Pi R^2}{2} \text{ si } \theta = 2\pi \right)$$

$$I_{zz} = \int \overbrace{(x^2 + y^2)}^{R^2} \overbrace{dm}^{\frac{\Pi}{2\pi} d\theta} = \frac{\Pi R^2}{2\pi} \int_0^\theta d\theta = \frac{\Pi R^2}{2\pi} \theta \left(= \Pi R^2 \text{ si } \theta = 2\pi \right)$$

$$I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy} = 0 \quad \text{pues } z = 0$$

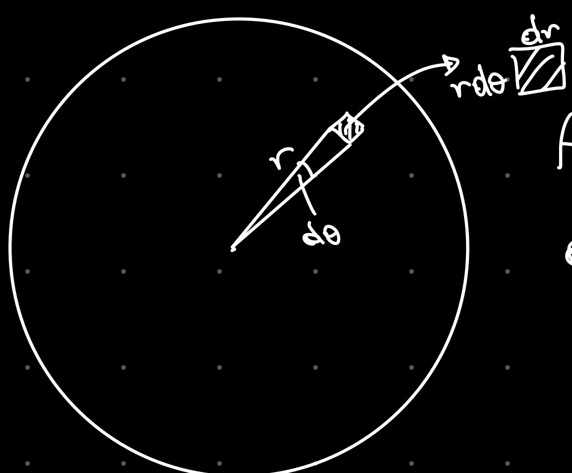
$$I_{xy} = -\int xy \, dm = -\int R^2 \cos\theta \sin\theta \frac{\Pi}{2\pi} d\theta = -\frac{\Pi R^2}{2\pi} \int_0^\theta \cos\theta \sin\theta \, d\theta \quad \rightarrow 0 \text{ si } \theta = 2\pi$$

$$= -\frac{\Pi R^2}{4\pi} \int_0^\theta \sin(2\theta) d\theta = + \frac{\Pi R^2}{4\pi} \left[\frac{\cos(2\theta)}{2} \right] \Bigg|_0^\theta = \frac{\Pi R^2}{8\pi} \left[\cos(2\theta) - 1 \right]$$

$$\therefore I = \begin{bmatrix} \frac{\Pi R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Pi R^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \Pi R^2 \end{bmatrix} \text{ si } \theta = 2\pi$$

<u>Disco</u>: $\sigma = \frac{\Pi}{\pi R^2} = \frac{dm}{dS}$

Para encontrar dS, tomamos un trozo:



$\Rightarrow dS = r \, dr \, d\theta$

Alternativamente, usar teorema cambio de variable visto en CVV.

Luego: Para r y θ dado, $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = 0$

$$I_{xx} = \int (y^2+z^2)\,dm = \int (r^2\sin^2\theta)\left(\frac{M}{\pi R^2}\right)(r\,dr\,d\theta)$$

$$= \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R r^3\,dr \int_0^{2\pi} \sin^2\theta = \frac{M}{\pi R^2}\cdot\frac{R^4}{4}\cdot\pi = \frac{MR^2}{4}$$

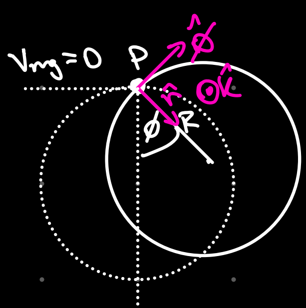
Analogo $I_{yy} = \dfrac{MR^2}{4}$

$$I_{zz} = \int (x^2+y^2)\,dm = \int_0^{2\pi}\int_0^R (r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta)(r\,dr\,d\theta)\left(\frac{M}{\pi R^2}\right)$$

$$= \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3\,dr = \frac{M}{\pi R^2}\cdot 2\pi\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

$$\Rightarrow I = MR^2\begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

a) $EMT = K_{cm} + K_{REL} + V_{mg}$



$K_{cm} = \frac{1}{2}MV_{cm}^2$

Con: $\vec{R}_{cm} = R\hat{r} \qquad \vec{V}_{cm} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$

$\rightarrow K_{cm} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\phi}^2$

$K_{REL} = \frac{1}{2}\vec{\Omega}\cdot(I\vec{\Omega}) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\phi}^2 = \frac{MR^2\dot{\phi}^2}{4}$

$V_{mg} = -MgR\cos\phi$

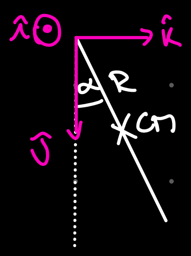
$\Rightarrow EMT = \dfrac{3MR^2\dot{\phi}^2}{4} - MgR\cos\phi \;\Big/\; \dfrac{d}{dt}$

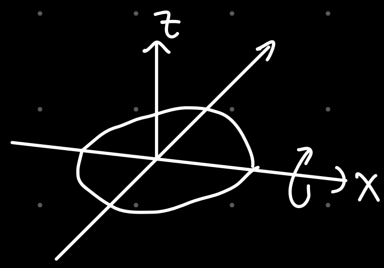
$\Rightarrow 0 = \dfrac{3\cancel{M}R\cancel{^2}}{2}\cancel{\dot{\phi}}\ddot{\phi} + \cancel{M}g\cancel{R}\cancel{\dot{\phi}}\sin\phi$

$\Rightarrow \ddot{\phi} = -\dfrac{2g}{3R}\sin\phi \quad \left(\omega_0^2 = \dfrac{2g}{3R}\right)$

b) Consideremos una rotación en eje tgte.:

$\vec{\Omega} = \dot{\alpha}\,\hat{\imath}$





(Imaginarse vista lateral)

$K_{cm} = \frac{1}{2} m V_{cm}^2$

$\vec{R}_{cm} = R\sin\alpha\,\hat{k} - R\cos\alpha\,\hat{\jmath}$

$\vec{V}_{cm} = R\dot{\alpha}(\cos\alpha\,\hat{k} + \sin\alpha\,\hat{\jmath})$

$\Rightarrow K_{cm} = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\alpha}^2$

$K_{REL} = \frac{1}{2}\vec{\Omega}(I\,\vec{\Omega})$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{\alpha}\\0\\0\end{pmatrix}\left[mR^2\begin{pmatrix}1/4 & 0 & 0\\0 & 1/4 & 0\\0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\alpha}\\0\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{mR^2}{2}\frac{\dot{\alpha}^2}{4} = \frac{mR^2}{8}$$

$V_{mg} = -mgR\cos\alpha$

$\Rightarrow EMT = \frac{5mR^2}{8}\dot{\alpha}^2 - mgR\cos\alpha \;\Big/ \frac{d}{dt} \quad (EMT = cte.)$

$\Rightarrow 0 = \frac{5\cancel{m}R^{\cancel{2}}}{4}\cancel{\dot{\alpha}}\,\ddot{\alpha} + \cancel{m}g\cancel{R}\cancel{\dot{\alpha}}\sin\alpha$

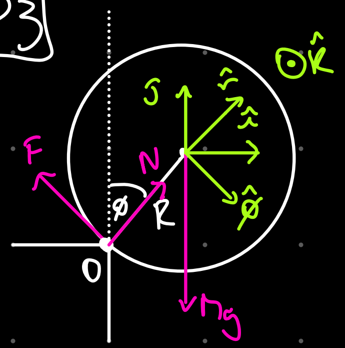
$\Rightarrow \ddot{\alpha} = -\frac{4g}{5R}\sin\alpha \quad \left(w_0^2 = \frac{4g}{5R}\right)$

Frec. claramente más alta

Alternativo a), b): Calcular momento de inercia directamente en P y calcular única cinetica $K_{Tot} = \frac{1}{2}\vec{\Omega}\cdot(I\vec{\Omega})$

o usar torque.

P3)



$I = mR^2/\alpha$

a) Queremos $\dot{\phi}(\phi)$. Tenemos I c/r al punto de apoyo $\Rightarrow$ Usamos torque c/r a este.

$\vec{L}_0 = I_0 \vec{\Omega}$ (rotación en un plano)

$\Rightarrow \vec{L}_0 = -I_0 \dot{\phi} \hat{k}$ $(\vec{\Omega} = -\dot{\phi}\hat{k})$

$$\vec{\tau}_0 = \cancel{\vec{\tau}_F}^{\,0} + \vec{\tau}_{mg}$$

$$= R\hat{r} \times -mg\hat{j}$$

$$= R(\sin\phi\,\hat{\imath} + \cos\phi\,\hat{j}) \times -mg\hat{j}$$

$$= -mgR\sin\phi\,\hat{k}$$

Como $\dot{\vec{L}}_0 = \vec{\tau}_0$

$$\Rightarrow -I\ddot{\phi} = -mgR\sin\phi$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} = \frac{mgR}{I}\sin\phi = \frac{g\alpha}{R}\sin\phi$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}\,d\dot{\phi} = \frac{\alpha g}{R}\sin\phi\,d\phi \Big/ \int_0^{\dot{\phi}}, \int_0^{\phi}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\phi}^2}{2} = \frac{\alpha g}{R}(-\cos\phi)\Big|_0^{\phi} \Rightarrow \dot{\phi}^2 = \frac{2\alpha g}{R}(1-\cos\phi)$$

b) Usamos Newton:

$m\vec{A}_{cm} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N}$, $\vec{N} = N\hat{r}$, $m\vec{g} = -mg\hat{j} = -mg(\cos\phi\,\hat{r} - \sin\phi\,\hat{\phi})$, $\vec{F} = -F\hat{\phi}$

$\vec{R}_{cm} = R\hat{r}$ $\quad \vec{V}_{cm} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$ $\quad \vec{A}_{cm} = R\ddot{\phi}\hat{\phi} - R\dot{\phi}^2\hat{r}$

$\hat{\phi})\; mR\ddot{\phi} = -F + mg\sin\phi$

$$\Rightarrow F = mg\sin\phi - mg\alpha\sin\phi$$
$$= mg\sin\phi(1-\alpha)$$

c) $\hat{r})\ -mR\dot{\phi}^2 = -mg\cos\phi + N$
$$\Rightarrow N = mg\cos\phi - m\cancel{R}\cdot\frac{2\alpha g}{\cancel{R}}(1-\cos\phi)$$
$$= mg(\cos\phi - 2\alpha + 2\alpha\cos\phi)$$
$$= mg(\cos\phi + 2\alpha(\cos\phi - 1))$$

Roce estático máximo $F = \mu_e N$ en $\phi = 30°$

$$\Rightarrow \cancel{m}\cancel{g}(1-\alpha)\sin(30°) = \mu_e \cancel{m}\cancel{g}\left(\cos(30°) + 2\alpha(\cos(30°)-1)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1-\alpha}{2} = \mu_e\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\right)$$

$$\Rightarrow \mu_e = \frac{1-\alpha}{\sqrt{3} + 2\alpha(\sqrt{3}-2)}$$

Forma alternativa a):

(1)

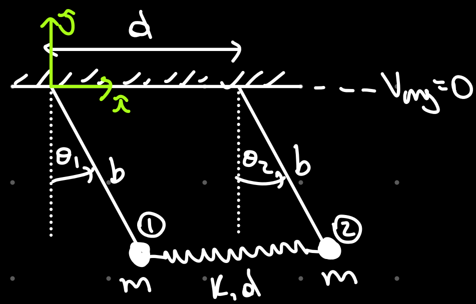
$$E_{MT} = K + V$$
c/r punto fijo, así no es necesario K_{REL}, K_{CM}
$$= \frac{1}{2}\vec{\Omega}\cdot(I\vec{\Omega}) + V_{mg}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{mR^2}{\alpha}\dot{\phi}^2 + mgR\cos\phi \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\cancel{M}R^{\cancel{2}}}{2}\cancel{\dot{\phi}}\,\ddot{\phi} - \cancel{M}g\cancel{R}\sin\phi\,\cancel{\dot{\phi}} \quad \text{(EMT cte.)}$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} = \frac{2g}{R}\sin\phi$$

<u>OJO</u>: No se puede usar Steiner, pues no se tiene el momento de inercia c/r al centro de masa.

P4)



a) $K = K_1 + K_2$

$$= \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}_2^2$$

$$V = V_{mg,1} + V_{mg,2} + V_{Resorte}$$

b)

$\vec{r}_1 = b\sin\theta_1\hat{\imath} - b\cos\theta_1\hat{\jmath}$ $\qquad$ $\vec{r}_2 = (d + b\sin\theta_2)\hat{\imath} - b\cos\theta_2\hat{\jmath}$

largo resorte $= \vec{r}_2\cdot\hat{\imath} - \vec{r}_1\cdot\hat{\imath}$ (Se debe asumir resorte horizontal)

$$= d + b\sin\theta_2 - b\sin\theta_1$$

$$= d + b(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

largo natural

$$\Rightarrow V = -mgb\cos\theta_1 - mgb\cos\theta_2 + \frac{K}{2}\left(d + b(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) - d\right)$$

$$\approx -mgb\left(1 - \frac{\theta_1^2}{2}\right) - mgb\left(1 - \frac{\theta_2^2}{2}\right) + \frac{Kb^2}{2}(\theta_1 - \theta_2)^2$$

$$= +mgb\left(-2 + \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2}\right) + \frac{Kb^2}{2}(\theta_1 - \theta_2)^2$$

$$\Rightarrow L = K - V$$

$$= \frac{1}{2}m\overbrace{b^2\dot{\theta}_1^2}^{v_1^2} + \frac{1}{2}m\overbrace{b^2\dot{\theta}_2^2}^{v_2^2} - mgb\left(\frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2} - 2\right) - \frac{Kb^2}{2}(\theta_1 - \theta_2)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -mgb\theta_1 - Kb^2(\theta_1 - \theta_2) \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -mgb\theta_2 + Kb^2(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = mb^2\dot{\theta}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = mb^2\ddot{\theta}_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = mb^2\dot{\theta}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = mb^2\ddot{\theta}_2$$

Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

θ_1) $mb^2\ddot{\theta}_1 + mgb\theta_1 + Kb^2(\theta_1 - \theta_2) = 0$

θ_2) $mb^2\ddot{\theta}_2 + mgb\theta_2 - Kb^2(\theta_1 - \theta_2) = 0$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{b}\theta_1 + \frac{K}{m}(\theta_1 - \theta_2) = 0$$
$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{b}\theta_2 - \frac{K}{m}(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

parte real

Proponemos la solución $\theta_K = A_K e^{i\omega t} = A_K \cos(\omega t)$, $K \in \{1, 2\}$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}_K = -A_K \omega^2 e^{i\omega t} = -\omega^2 \theta_K$$

Luego:

$$-\omega^2\theta_1 + \frac{g}{b}\theta_1 + \frac{K}{m}\theta_1 - \frac{K}{m}\theta_2 = 0$$
$$-\omega^2\theta_2 + \frac{g}{b}\theta_2 - \frac{K}{m}\theta_1 + \frac{K}{m}\theta_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -\omega^2 + g/b + K/m & -K/m \\ -K/m & -\omega^2 + g/b + K/m \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}}_{\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A\theta = 0$ si A es invertible

$$\Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}\theta = A^{-1}0 \Rightarrow \theta = 0$$

Como queremos la solución no trivial ($\theta \neq 0$), imponemos A no invertible $\Rightarrow \det A = 0$

$$\Rightarrow \left(-\omega^2 + g/b + K/m\right)^2 - \frac{K^2}{m^2} = 0$$
$$\Rightarrow \left|-\omega^2 + g/b + K/m\right| = \frac{K}{m} \quad \left(\frac{K}{m} > 0\right)$$

Si $-\omega^2 + g/b + k/m > 0 \Rightarrow \omega_0^2 = g/b$

Si $\omega^2 - g/b - k/m > 0 \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{2k}{m} + \frac{g}{b}$

Siguiendo: (Reemplazando frec. en ec. de movimiento)

$\omega_0)$ $-g/b\,\theta_1 + g/b\,\theta_1 + \frac{k}{m}\theta_1 - \frac{k}{m}\theta_2 = 0$

$$\Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}}\theta_1$$

modo simétrico (mismo signo)
oscilan en misma dirrección
frecuencia baja $(\omega_0 < \omega_1)$

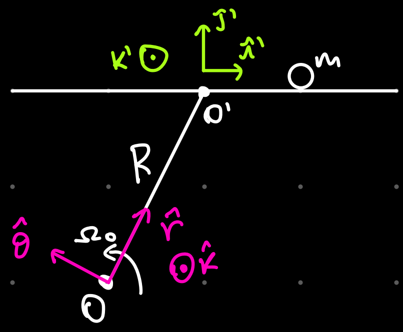
$\omega_1)$ $-\left(\frac{2k}{m} + \cancel{\frac{g}{b}}\right)\theta_1 + \cancel{g/b}\,\theta_1 + \frac{k}{m}\theta_1 - \frac{k}{m}\theta_2 = 0$

$$\Rightarrow -\frac{k}{m}\theta_1 - \frac{k}{m}\theta_2 = 0 \Rightarrow \theta_1 = -\theta_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}}\theta_1$$

modo antisimétrico
(signo opuesto)
oscilan en dirrección opuesta
frecuencial alta $(\omega_0 < \omega_1)$

P5

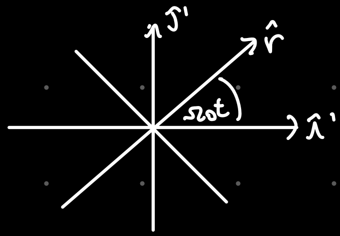
$\downarrow \vec{g}$



a) Definimos un sist. no inercial con origen en O', que acompaña la plataforma. Los ejes no giran pues $\hat{i}', \hat{j}'$ apuntan en la misma dirección. ($\vec{\Omega}_e = 0$)

La posición de O' c/r a O es $\vec{R}_{O'} = R\hat{r}$, $\vec{V}_{O'} = R\Omega_0 \hat{\theta}$

$\Rightarrow \vec{A}_{O'} = -R\Omega_0^2 \hat{r}$, lo queremos en el sist. $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$



$\Rightarrow \hat{r} = \cos(\Omega_0 t)\hat{i}' + \sin(\Omega_0 t)\hat{j}'$

$$\Rightarrow \vec{A}_{O'} = -R\Omega_0^2\left(\cos(\Omega_0 t)\hat{i}' + \sin(\Omega_0 t)\hat{j}'\right)$$

Cinemática:

$\vec{r}\,' = x\,\hat{i}'$

$\vec{v}\,' = \dot{x}\,\hat{i}'$

$\vec{a}\,' = \ddot{x}\,\hat{i}'$

Newton sist. no inercial:

$\vec{F}_{REALES} = m\vec{g} + \vec{N} = -mg\hat{j} + N\hat{j}$

$\vec{F}_{mao} = -m\vec{A}_{O'} = mR\Omega_0^2\left(\cos(\Omega_0 t)\hat{i}' + \sin(\Omega_0 t)\hat{j}'\right)$

$\vec{F}_{coriolis} = -2m\cancel{\vec{\Omega}_e}^{\,0} \times \vec{v}\,' = 0$

$\vec{F}_{centrifuga} = -m\cancel{\vec{\Omega}_e}^{\,0} \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}\,') = 0$

$\vec{F}_{transversal} = -m\cancel{\dot{\vec{\Omega}}_e}^{\,0} \times \vec{r}\,' = 0$

Luego en:

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{REALES} - \vec{F}_{mao} - \vec{F}_{coriolis} - \vec{F}_{centrifuga} - \vec{F}_{transversal}$$

$\hat{\imath}'$) $m\ddot{x} = mR\Omega_0^2\cos(\Omega_0 t)$ (1)

$\hat{\jmath}'$) $0 = mR\Omega_0^2\sin(\Omega_0 t) - mg + N$ (2)

(2):

$$N = mg - mR\Omega_0^2\sin(\Omega_0 t)$$

Condición de no despegue:

$$N \geq 0 \iff g \geq R\Omega_0^2\sin(\Omega_0 t)$$

$$\iff \frac{g}{R\sin(\Omega_0 t)} \geq \Omega_0^2$$

$\iff g/R \geq \Omega_0^2$, tomando máximo con $\sin(\cdot) = 1$ (igualdad)

b) De (1):

$$\ddot{x} = R\Omega_0^2\cos(\Omega_0 t) = \frac{d\dot{x}}{dt}$$

$$\Rightarrow d\dot{x} = R\Omega_0^2\cos(\Omega_0 t) \,/ \int_0^{\dot{x}}, \int_0^t$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = R\Omega_0^2\int_0^t \cos(\Omega_0 t)\,dt = R\Omega_0^2\left[\frac{1}{\Omega_0}\sin(\Omega_0 t)\right]\Big|_0^t$$

$$R\Omega_0\sin(\Omega_0 t)$$

Luego la distancia será:

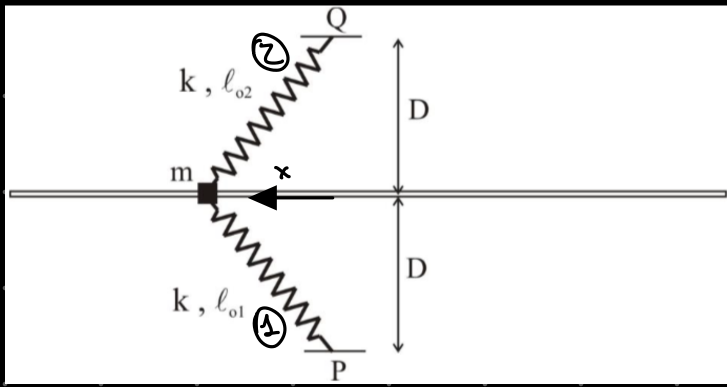
$$dx = R\Omega_0\sin(\Omega_0 t)\,dt \,/ \int_{x(0)}^{x(t)}, \int_0^t$$

$$\Rightarrow x(t) - x(0) = R\Omega_0\left[-\frac{1}{\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)\right]\Big|_0^t = R(1 - \cos(\Omega_0 t))$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + R(1 - \cos(\Omega_0 t))$$

$\therefore x_{máx} = x_0 + 2R$.

P6



Sea el largo del resorte ① l_1, por geometría:

$l_1^2 = x^2 + D^2 \iff l_1 = \sqrt{x^2+D^2}$

Analogo el largo del resorte ② es: $l_2 = \sqrt{x^2+D^2}$

Entonces las extensiones del resorte son:

$\delta_1 = l_1 - l_{01} = \sqrt{x^2+D^2} - l_{01}$, $\delta_2 = l_2 - l_{02} = \sqrt{x^2+D^2} - l_{02}$

Como no hay gravedad, el único potencial del sistema, es elástico:

$$V(x) = \frac{1}{2}K\delta_1^2 + \frac{1}{2}K\delta_2^2 = \frac{1}{2}K\left(\sqrt{x^2+D^2} - l_{01}\right)^2 + \frac{1}{2}K\left(\sqrt{x^2+D^2} - l_{02}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}K\left[x^2+D^2 - 2l_{01}\sqrt{x^2+D^2} + l_{01}^2 + x^2+D^2 - 2l_{02}\sqrt{x^2+D^2} + l_{02}^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}K\left[2x^2+2D^2 - 2\sqrt{x^2+D^2}(l_{01}+l_{02}) + l_{01}^2 + l_{02}^2\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dx}(x) = \frac{K}{2}\left[4x - 2(l_{01}+l_{02})\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+D^2}}\right)\right] = \frac{K}{2}\left[4x - \frac{2x(l_{01}+l_{02})}{\sqrt{x^2+D^2}}\right]$$

Los puntos de equilibrio son tq $V'(x) = 0$:

$$V'(x) = 0 \iff 4x - \frac{2x(l_{01}+l_{02})}{\sqrt{x^2+D^2}} = 0$$

$$\iff x\left\{4 - \frac{2(l_{01}+l_{02})}{\sqrt{x^2+D^2}}\right\} = 0$$

$$\iff x = 0 \ \vee \ 4 = \frac{2(l_{01}+l_{01})}{\sqrt{x^2+D^2}}$$

$$\iff x = 0 \ \vee \ 2\sqrt{x^2+D^2} = l_{01}+l_{02}$$

$$\iff x = 0 \ \vee \ 4(x^2+D^2) = (l_{01}+l_{02})^2$$

$$\iff x = 0 \ \vee \ x^2 = \frac{1}{4}(l_{01}+l_{02})^2 - D^2$$

$$\iff x_1 = 0 \ \vee \ x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}(l_{01}+l_{02})^2 - D^2}$$

Condición: (estricto para que no sea 0)

$\frac{1}{4}(l_{01}+l_{02})^2 > D^2$ (*)

$\iff (l_{01}+l_{02})^2 > 4D^2 \iff \boxed{l_{01}+l_{02} > 2D}$

Luego:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{K}{2}\left[4 - 2(l_{01}+l_{02})\frac{\sqrt{x^2+D^2} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+D^2}}}{x^2+D^2}\right]$$

$$= \frac{K}{2}\left[4-2(l_{01}+l_{02})\frac{x^2+D^2-x^2}{(x^2+D^2)^{3/2}}\right]$$

$$= \frac{K}{2}\left[4-2(l_{01}+l_{02})\frac{D^2}{(x^2+D^2)^{3/2}}\right]$$

Evaluando en los puntos de eq. encontrados:

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_1=0} = \frac{K}{2}\left[4-2(l_{01}+l_{02})D^{-1}\right]$$

Donde si $l_{01}+l_{02} > 2D \Rightarrow 2(l_{01}+l_{02})D^{-1} > 4 \Rightarrow 4-2(l_{01}+l_{02})D^{-1} < 0 \Rightarrow x_1$ es E.I

de lo opuesto si $l_{01}+l_{02} < 2D \rightarrow x_1$ es E.E

Resumiendo $\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_1} = \begin{cases} <0,\ l_{01}+l_{02}>2D \Rightarrow x_1 \text{ es E.I} \\ >0,\ l_{01}+l_{02}<2D \Rightarrow x_1 \text{ es E.E} \end{cases}$

Para $x_{2,3}$: $\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_{2,3}} = \frac{K}{2}\left[4-2(l_{01}+l_{02})D^2\left(\frac{1}{4}(l_{01}+l_{02})^2 \cancel{-D^2+D^2}\right)^{-3/2}\right]$

$$= \frac{K}{2}\left[4-\frac{2D^2\cancel{(l_{01}+l_{02})}}{(1/4(l_{01}+l_{02})^2)^{3/2}}\right]$$

$$= \frac{K}{2}\left[4-\frac{2D^2}{\frac{1}{8}(l_{01}+l_{02})^2}\right] = \frac{K}{2}\left[4-\frac{16D^2}{(l_{01}+l_{02})^2}\right]$$

La existencia de estos puntos depende de ⊛, a partir del cual

$l_{01}+l_{02} > 2D \Rightarrow (l_{01}+l_{02})^2 > 4D^2 \Rightarrow 1 > \frac{4D^2}{(l_{01}+l_{02})^2} \Rightarrow -4 < -\frac{16D^2}{(l_{01}+l_{02})^2} \Rightarrow 0 < \left(4-\frac{16D^2}{(l_{01}+l_{02})^2}\right)\frac{K}{2} = \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_{2,3}}$

∴ De existir el equilibrio $x_{2,3}$ es estable.

En el sistema la energía se conserva pues no hay fzas. no conservativas: ($N \perp d\vec{r} \Rightarrow W_N = 0$ y $\vec{F}_e$ conservativa)

$$\overset{\text{cte.}}{EMT} = \frac{1}{2}\underbrace{m}_{\alpha}\dot{x}^2 + V(x) \ \Big/ \ \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow w_0^2 = \frac{V''(x_{eq})}{\alpha} = \frac{V''(x_{eq})}{m}$$

Finalmente:

·) Si $l_{01}+l_{02}>2D$: (3 ptos. de equilibrio)

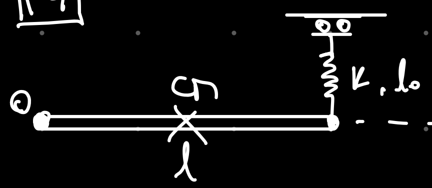
$x_{2,3}$ son E.E $\Rightarrow w_0^2 = \frac{V''(x_{2,3})}{m} = \frac{k}{2m}\left[4-\frac{16D^2}{(l_{01}+l_{02})^2}\right]$

x_1 es E.I

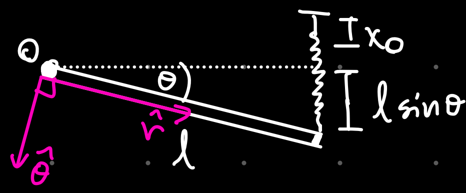
·) Si $l_{01}+l_{02}<2D$: (1 punto de equilibrio)

x_1 es E.E $\rightarrow w_0^2 = \frac{V''(x_1)}{m} = \frac{k}{2m}\left[4-\frac{2(l_{01}+l_{02})}{D}\right]$

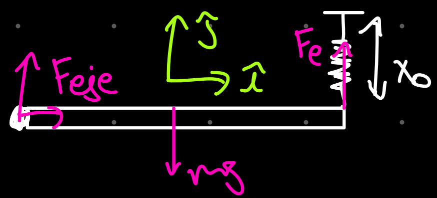
P7



Oscilación:



a) Consideramos la barra en eq.:



Sea el largo del resorte en eq.: x_0

En esta posición esta en reposo $\Rightarrow \vec{\tau}_0$

(No podemos usar Newton dado que no sabemos F_{eje})

$$\vec{\tau}_0 = \vec{\tau}_{mg} + \vec{\tau}_{Fe} + \cancel{\vec{\tau}_{Feje}}^{\,0,\ \vec{r}=0}$$

$$= \frac{l}{2}\hat{i}\times(-mg\,\hat{j}) + l\hat{i}\times\underbrace{(+Kx_0\hat{j})}_{\vec{F}_e}$$

$$= -mg\frac{l}{2}\hat{k} + Klx_0\hat{k} = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{mg}{2K}$$

b)

Lagrange: $\mathcal{L} = K - V$

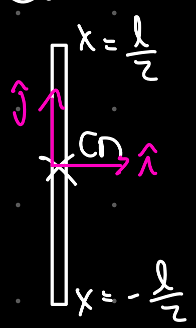
ver dibujo

$K = K_{cm} + K_{REL}$ $\qquad V = V_{mg} + V_{resorte} = -mg\frac{l}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}K(x_0 + l\sin\theta)^2$

$\vec{R}_{cm} = \frac{l}{2}\hat{r} \Rightarrow \vec{V}_{cm} = \frac{l}{2}\dot{\theta}\hat{\theta} \Rightarrow K_{cm} = \frac{1}{2}m\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{8}ml^2\dot{\theta}^2$

Para K_{REL}, necesitamos I (I_{zz} en realidad):

Calculo de I c/r al cm:



Densidad lineal: $\lambda = \frac{m}{l} \Rightarrow dm = \lambda\, dl$

$$I_{zz} = \int (x^2 + \cancel{y^2}^{\,0})\,dm = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \lambda\, dl$$

$$= \lambda \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{m}{l}\left(\frac{l^3}{24}+\frac{l^3}{24}\right) = \frac{ml^2}{12}$$

$$\Rightarrow K_{REL} = \frac{1}{2}\vec{\Omega}\cdot(I_{cm}\vec{\Omega}) \quad [\vec{\Omega} = \dot{\theta}\hat{k}]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{12}\right)\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow K = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{24} + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{8} = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{6}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{6} + mg\frac{l}{2}\sin\theta - \frac{K}{2}(x_0 + l\sin\theta)^2$$

Euler Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{ml^2\dot{\theta}}{3} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{ml^2\ddot{\theta}}{3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = + mg\frac{l}{2}\cos\theta - K(x_0 + l\sin\theta)\cdot l\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{ml^{\cancel{2}}\ddot{\theta}}{3} - \frac{mg\cancel{l}}{2}\cos\theta + K(x_0 + l\sin\theta)\cdot \cancel{l}\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{ml\ddot{\theta}}{3} - \cancel{\frac{mg}{2}\cos\theta} + \cancel{K\frac{mg}{2K}\cos\theta} + Kl\sin\theta\cos\theta = 0$$

Taylor: $\cos\theta$ es $1 - \frac{\theta^2}{2}$

Linealizando c/r al eq. $(\theta = 0)$: $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$

$$\Rightarrow \frac{ml\ddot{\theta}}{3} + Kl\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{\frac{3K}{m}}_{\omega_0^2\ (\text{frec.})}\theta = 0 \quad (\text{Ec. mov.})$$