

# Auxiliar Extra Examen

Fecha: 08/07/2025

**Profesor: Andrés Escala**

Auxiliares: Gerald Barnert, Anish Samtani, Astor Sandoval, Sebastián Valdebenito

## P1. Sólido Rígido

Un disco homogéneo de masa  $M$  y radio  $R$  tiene en su centro  $C$  soldada una vara de masa despreciable de largo  $2R$  como muestra la figura. El sistema se ubica sobre una superficie horizontal lubricada de manera que no existe ningún roce. El otro extremo de la vara está fijo a un punto  $O$  de la superficie, en torno al cual el sistema puede rotar.

- Si el sistema está en completo reposo sobre la superficie, determine las fuerzas verticales que la superficie ejerce sobre el sistema en el punto  $O$  y en el punto  $Q$  de contacto entre superficie y disco.
- Si los momentos de inercia del disco respecto a los ejes  $x, y, z$  mostrados en la figura son  $I_{xx} = \frac{1}{2}MR^2$ ,  $I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{4}MR^2$ , determine los momentos de inercia respecto de ejes  $x', y', z'$  paralelos a los anteriores, pero con origen en el punto  $O$ .
- Escriba la ecuación de movimiento del centro de masa y la ecuación de momento angular y torque con respecto a  $O$ .

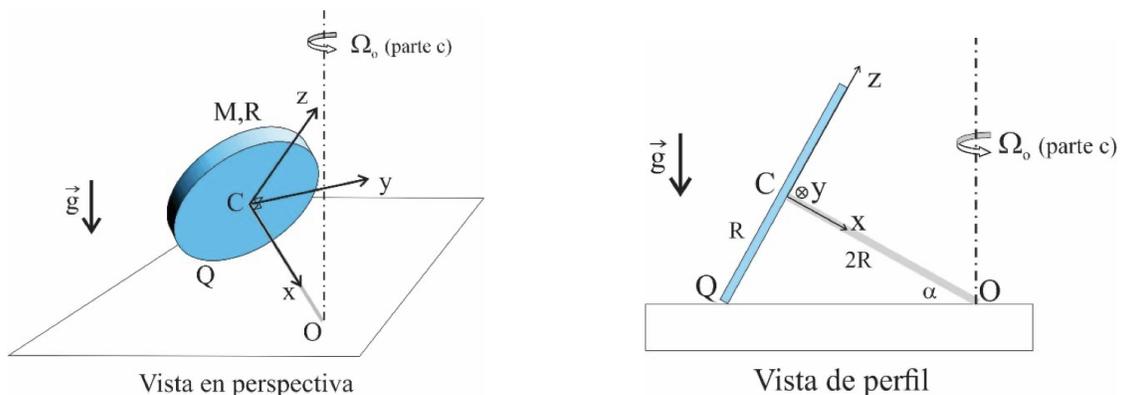
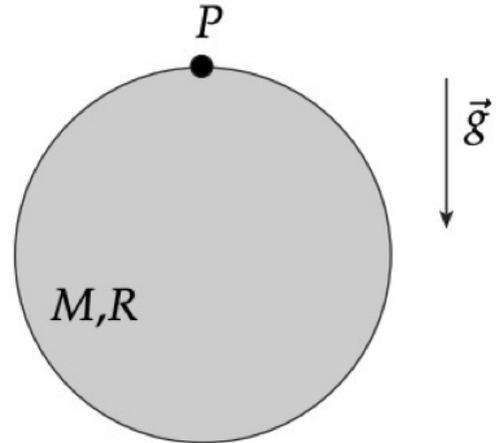


Figura 1: P1

## P2. Sólido Rígido

Una lámina circular de radio  $R$ , densidad homogénea y masa total  $M$ , puede moverse en torno a un punto fijo  $P$  de su perímetro.

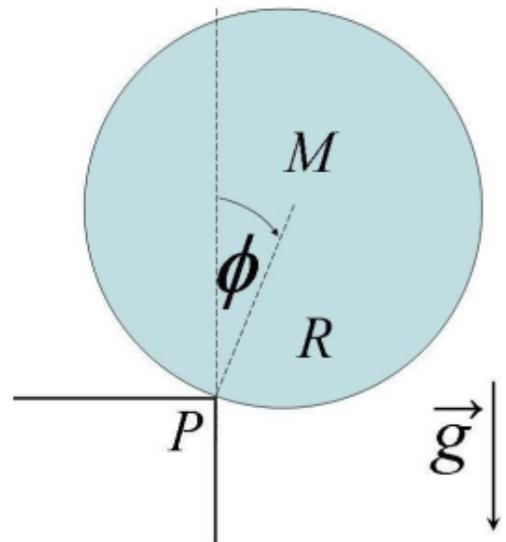
- Utilice energía para encontrar la frecuencia de pequeñas oscilaciones de la lámina con respecto al eje perpendicular a la lámina y que pasa por el punto  $P$ .
- Utilice energía para encontrar la frecuencia de pequeñas oscilaciones de la lámina con respecto a un eje tangente a ésta y que pasa por el punto  $P$  (el eje es paralelo al plano de la lámina). ¿Qué frecuencia es mayor? ¿Podría haber contestado esta última pregunta simplemente comparando los elementos de la matriz de inercia de la lámina circular?
- Repita a) pero usando torque y momento angular.



## P3. Solido Rígido

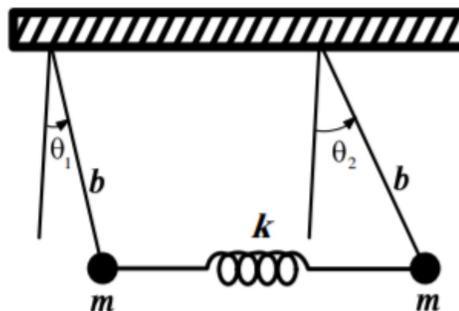
Un disco de radio  $R$ , masa total  $M$  y momento de inercia  $I = \frac{MR^2}{\alpha}$ , ( $\alpha < 1$ ) con respecto al punto de apoyo, cae sin deslizar desde el borde  $P$  de una mesa, como se muestra en la figura. Si en el instante inicial  $\phi = 0$  y  $\dot{\phi} = 0$ .

- Determine  $\dot{\phi}(\phi)$ .
- Encuentre componentes de la fuerza de contacto en función de  $\phi$ .



## P4. Lagrangiano

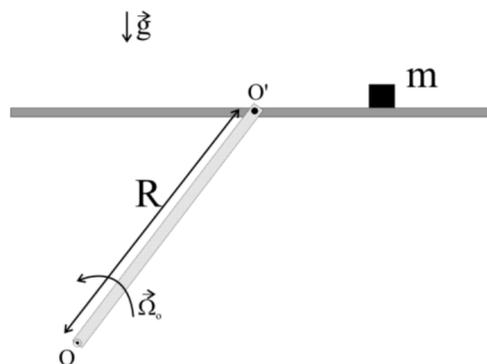
Considere dos péndulos de largo  $b$  y masa  $m$  separados por una distancia  $d$ , unidos por un resorte de constante elástica  $k$  y largo natural  $d$ , como se muestra en la figura adyacente. Encuentre las frecuencias normales y modos de oscilación.



## P5. Sistema no inercial

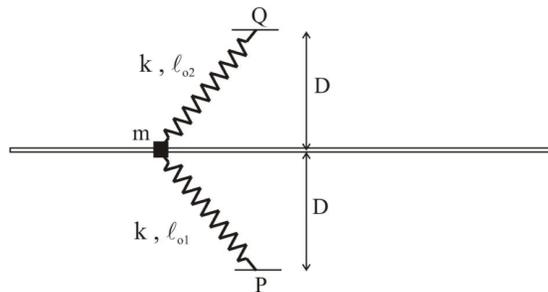
Un brazo mecánico de largo  $R$  rota con velocidad angular constante  $\Omega_0$  respecto de un eje horizontal que pasa por su extremo  $O$ . Su otro extremo,  $O'$ , sostiene una plataforma, la cual mediante un sistema de control se mantiene siempre horizontal. Considere un bloque de masa  $m$  que puede deslizar sin roce sobre la plataforma. Si en el momento en que el brazo está en su posición horizontal (y subiendo) el bloque se encuentra en el punto  $O'$  en reposo relativo a la plataforma, se pide:

- Determinar el valor máximo de la velocidad angular  $\Omega_0$  para que el bloque nunca se despegue de la plataforma.
- Si la condición de a) se cumple, determine la distancia máxima alcanzada por el bloque respecto a  $O'$  (suponga que el largo de la plataforma es suficiente para impedir que el bloque caiga por sus extremos).



## P6. Oscilaciones

Una argolla de masa  $m$  puede deslizar sin roce inserta en una barra horizontal. La argolla está unida a puntos fijos  $P$  y  $Q$  mediante resortes de igual constante elástica,  $k$ , pero de largos naturales  $l_{o1}$  y  $l_{o2}$ . Los puntos  $P$  y  $Q$  se ubican simétricamente respecto a la barra, a una distancia  $D$  de ella (ver figura). Se pide determinar los puntos de equilibrio de la argolla sobre la barra, indicando sus condiciones de existencia, los tipos de equilibrio y la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a los equilibrios estables.



## P7. Sólido Rígido

Una barra delgada y uniforme de longitud  $l$  y masa  $m$  tiene un extremo fijo en el punto  $O$ , mientras que su otro extremo se encuentra conectado a un resorte de constante elástica  $k$  y largo natural nulo en el punto  $A$ , tal que siempre esta vertical.

- Si la barra esta en equilibrio cuando esta completamente horizontal, determine la extensión del resorte en aquella condición.
- Determine la ecuación de movimiento y frecuencia de pequeñas oscilaciones.

