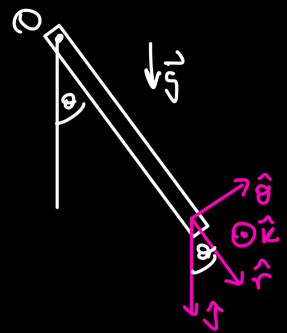
P1



Largo L y masa m. $I_{cm} = \frac{1}{12}mL^2$

a) La rotación es: $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}$

$\vec{L}_0 = I_0\vec{\omega}$

Como solo hay rotación en un plano:

$\vec{L}_0 = I_0\dot{\theta}\hat{k}$

Por teorema Steiner: $I_0 = I_{cm} + m\overbrace{(x_{cm}^2 + y_{cm}^2)}^{r_{cm}^2 \text{ en polares}}$, donde

d es la distancia en cm y el punto O:

$$\Rightarrow I_0 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)mL^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

$$\therefore \vec{L}_0 = \frac{1}{3}mL^2\dot{\theta}\hat{k}$$

Luego el torque esta dado por:

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r}\times\vec{F} = \frac{L}{2}\hat{r}\times mg\hat{\jmath} = \frac{L}{2}\hat{r}\times mg(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}) = -\frac{mgL}{2}\sin\theta\,\hat{k}$$

Como $\dot{\vec{L}}_0 = \vec{\tau}_0$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\cancel{m}L^{\cancel{2}}\ddot{\theta}\hat{k} = -\frac{\cancel{m}g\cancel{L}}{2}\sin\theta\,\cancel{\hat{k}} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{3g}{2L}\sin\theta \quad (*)$$

b) $m\vec{A}_{cm} = \vec{F}_{eje} - m\vec{g} \Rightarrow \vec{F}_{eje} = m(\vec{A}_{cm} + \vec{g})$

$\vec{R}_{cm} = \frac{L}{2}\hat{r} \qquad \vec{V}_{cm} = \frac{L}{2}\dot{\theta}\hat{\theta} \qquad \vec{A}_{cm} = \frac{L}{2}(\ddot{\theta}\hat{\theta} - \dot{\theta}^2\hat{r})$

$$\Rightarrow \vec{A}_{cm} = \frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\left(\frac{\pi}{2}\right)\hat{\theta} - \cancelto{\dot{\theta}_0 = 0}{\dot{\theta}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\hat{r}}\right) = \frac{\cancel{L}}{2}\left(-\frac{3g}{2\cancel{L}}\right)\hat{\theta} = -\frac{3}{4}g\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{eje} = m\left(-\frac{3}{4}g\hat{\theta} + g\cancelto{0}{\cos\frac{\pi}{2}}\hat{r} - g\overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{1}\hat{\theta}\right) = -\frac{7}{4}mg\hat{\theta}$$

c) De (*): $\sin\theta \approx \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{\boxed{\frac{3g}{2L}}}_{\omega_0^2}\theta = 0$ (ec. oscilador armonico)

Condición de no resbalamiento:

La velocidad relativa entre los puntos de contacto instantaneo entre el disco y la superficie es nula.

Se sabe que $\vec{v}_P = \vec{v}_c + \vec{\Omega}_s \times \vec{CP}$, donde $\vec{v}_P$: velocidad del punto P,

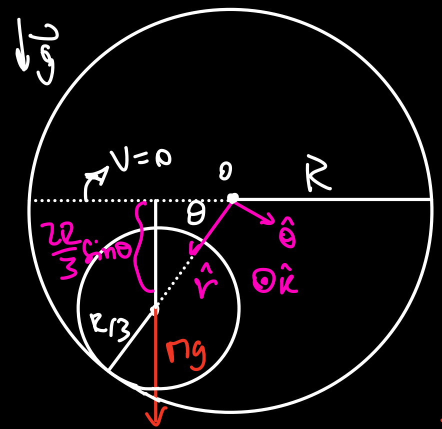
$\vec{v}_c$: velocidad del centro

$\vec{\Omega}_s$: velocidad angular del disco

$\vec{CP}$: vector del centro al punto P

Basta imponer $\vec{v}_P = 0$ (cuando p es punto de contacto con la sup.)

P2)

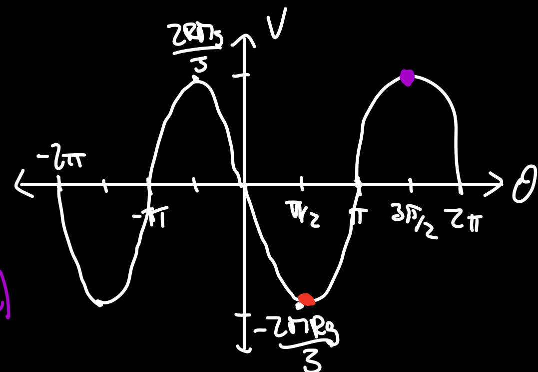


a) Como el disco es homogeneo, tiene su CM en el centro.

Luego por indicación: $I_{CM} = \frac{1}{2} M \left(\frac{R}{3}\right)^2 = \frac{MR^2}{18}$

Para el equilibrio usamos el potencial:

$$V(\theta) = -Mg\frac{2R}{3}\sin\theta$$



- $\theta = \frac{\pi}{2}$ es eq. estable (mínimo)
- $\theta = \frac{3\pi}{2}$ es eq. inestable (máximo)

$$V'(\theta) = -\frac{2MgR}{3}\cos\theta$$

$$V''(\theta) = \frac{2MgR}{3}\sin\theta \Rightarrow V''(\pi/2) = \frac{2MgR}{3}$$

La frec. de oscilación es: $w_0^2 = \frac{V''(\pi/2)}{\alpha}$, donde α sale de la energía: $\left(EMT = \frac{1}{2}\alpha\dot{\theta}^2 + V(\theta)\right)$

$$EMT = K_{CM} + K_{REL} + V \qquad \|\dot{\vec{R}}_{CM}\| = \left\|\frac{d}{dt}\left(\frac{2R}{3}\hat{r}\right)\right\|$$

Donde: $K_{CM} = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{2R}{3}\dot{\theta}\right)^2 = \frac{2MR^2}{9}\dot{\theta}^2$

$K_{REL} = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_s \cdot (I_{cm}\vec{\Omega}_s)$, donde $\vec{\Omega}_s$: velocidad angular del disco sobre su propio eje $\Rightarrow \vec{\Omega}_s = \Omega\hat{k}$ y como solo rota en el plano x-y

$$K_{REL} = \frac{1}{2}\Omega\hat{k}\cdot(I_{cm,zz}\Omega\hat{k}) = \frac{1}{2}I_{zz,cm}\Omega^2 = \frac{MR^2}{36}\Omega^2$$

Para encontrar Ω usamos la cond. de no resbalamiento:

$\vec{P} = R\hat{r}$, imponemos $\vec{v}_P = 0$

$$\vec{r}_c = \frac{2R}{3}\hat{r} \Rightarrow \vec{v}_c = \frac{2R}{3}\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{CP} = \frac{R}{3}\hat{r}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{2R}{3}\dot{\theta}\hat{\theta} + \Omega\hat{k}\times\frac{R}{3}\hat{r} \Rightarrow \frac{2R}{3}\dot{\theta} + \frac{R\Omega}{3} = 0 \Rightarrow \Omega = -2\dot{\theta}\ (*)$$

$$\Rightarrow K_{REL} = \frac{MR^2}{36}\cdot 4\dot{\theta}^2 = \frac{MR^2}{9}\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow E_{MT} = \frac{3MR^2}{9}\dot{\theta}^2 + V(\theta) = \underbrace{\frac{MR^2}{3}}\dot{\theta}^2 + V(\theta)$$

$$\frac{1}{2}\alpha\dot{\theta}^2 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{MR^2}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2MR^2}{3}$$

Finalmente: $\omega_0^2 = \frac{2MgR}{3}\cdot\frac{3}{2MR^2} = \frac{g}{R}$

b) Newton: $M\vec{A}_{cm} = \sum \vec{F}_{ext}$

$\vec{R}_{cm} = \frac{2}{3}R\hat{r}$ $\quad \vec{V}_{cm} = \frac{2}{3}R\dot{\theta}\hat{\theta}$ $\quad \vec{A}_{cm} = \frac{2}{3}R\ddot{\theta}\hat{\theta} - \frac{2}{3}R\dot{\theta}^2\hat{r}$

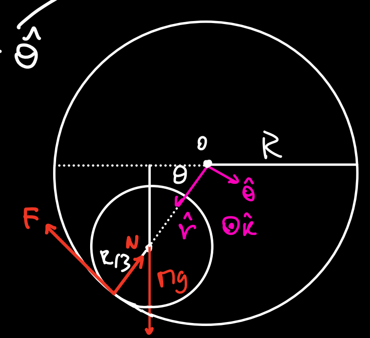
$$\sum\vec{F}_{ext} = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{roce} = Mg\overbrace{(\sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta})}^{-\hat{j}} - N\hat{r} - F\hat{\theta}$$

Existe por rodadura sin resbalar, no disipa energía.

$\hat{r})\ -\frac{2}{3}MR\dot{\theta}^2 = -N + Mg\sin\theta$

$\hat{\theta})\ -\frac{2}{3}MR\ddot{\theta} = Mg\cos\theta - F$

Para sacar F y N necesitamos $\dot{\theta}^2$ de integrar $\ddot{\theta} = (\dots)$ y F de alguna otra ec. (3 incognitas, 2 ec.)



Falta F: Podemos usar torque

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{\tau}_{cm} \quad (**)$$

$\vec{r}=0$, no hay palanca

0, $\vec{N} // \vec{R}_{cm}$

$$\vec{\tau}_{cm} = \vec{r} \times m\vec{g} + \vec{R}_{cm} \times \vec{N} + \vec{R}_{cm} \times \vec{F}_{Roce}$$

$$= \frac{R}{3}\hat{r} \times (-F\hat{\theta})$$

$$= -\frac{FR}{3}\hat{k}$$

$$\vec{L}_{cm} = I_{cm}\vec{\Omega} = I_{zz}\Omega\hat{k} \text{ (solo rota en un plano)}$$

$$= \frac{mR^2}{18}\overset{(*)}{(-2\dot{\theta})} = -\frac{mR^2}{9}\dot{\theta}$$

$$\overset{(**)}{\Rightarrow} \cancel{+}\frac{mR^{\cancel{2}}}{9}\ddot{\theta} = \cancel{+}\frac{F\cancel{R}}{3} \Rightarrow \boxed{F = \frac{mR}{3}\ddot{\theta}}$$

Volviendo a la ec. de Newton:

$$\frac{2}{3}mR\ddot{\theta} = mg\cos\theta - \frac{mR}{3}\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{R}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \frac{g}{R}\cos\theta\, d\theta \Bigg/ \int_{\underset{\text{reposo}}{0}}^{\dot{\theta}}, \int_{\pi/4}^{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{g}{R}\sin\theta\Big|_{\pi/4}^{\theta} = \frac{g}{R}\left(-\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

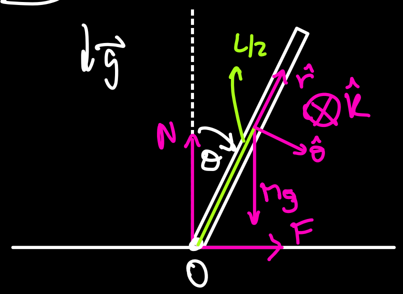
$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin\theta\right)$$

Finalmente:

$$F = \frac{mg}{3}\cos\theta \ ; \ N = mg\sin\theta + \frac{2}{3}mR\dot{\theta}^2$$

Alternativo a): Partir de b) y obtener eq. y frec. de oscilación de $\ddot{\theta} = \underbrace{\frac{g}{R}}_{\omega_0^2} \cos\theta$

P3)



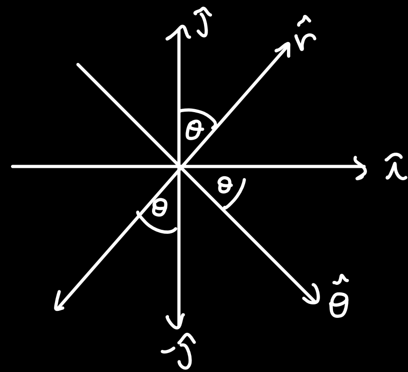
a) De manera conveniente elegimos el punto O para encontrar el momento angular, dado que $\vec N$ y $\vec F$ son desconocidas, pero quedan nulos en el torque ($\vec r = 0$).

$$\vec L_0 = I_0 \dot\theta \hat k = \left(I_{cm} + M(x_{cm}^2 + y_{cm}^2)\right)\dot\theta \qquad \text{(Steiner)}$$

$$= \left(\frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\dot\theta \hat k = \frac{ML^2}{3}\dot\theta \hat k$$

Luego $\vec\tau_0 = \frac{L}{2}\hat r \times Mg\overbrace{(-\cos\theta \hat r + \sin\theta \hat\theta)}^{-\hat\jmath}$

$$= \frac{MgL}{2}\sin\theta \hat k$$



Como $\frac{d\vec L_0}{dt} = \vec\tau_0 \Rightarrow \frac{\cancel{M}L^{\cancel{2}}}{3}\ddot\theta = \frac{\cancel{M}g\cancel{L}}{2}\sin\theta$

$$\Rightarrow \dot\theta\, d\dot\theta = \frac{3g}{2L}\sin\theta\, d\theta \Big/ \int_0^{\dot\theta}, \int_0^{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot\theta^2}{2} = \frac{3g}{2L}[-\cos\theta]\Big|_0^{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot\theta^2 = \frac{3g}{L}(1-\cos\theta)$$

b) Usamos Newton sobre el CM:

$$M\vec A_{cm} = \Sigma \vec F_{ext}$$

$\vec A_{cm} = \ddot x \hat\imath + \ddot y \hat\jmath$; $\Sigma \vec F_{ext} = \vec N + \vec F + M\vec g = N\hat\jmath + F\hat\imath - Mg$

$\hat\imath$) $M\ddot x = F$ $\qquad$ $\hat\jmath$) $M\ddot y = N - Mg \Rightarrow N = M(g + \ddot y)$

falta $\ddot x$ y $\ddot y$, pero tenemos $\dot\theta$, por ende usamos relación cinemática:

$$x = \frac{L}{2}\sin\theta \qquad y = \frac{L}{2}\cos\theta$$

$$\dot{x} = \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta \qquad \dot{y} = -\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta$$

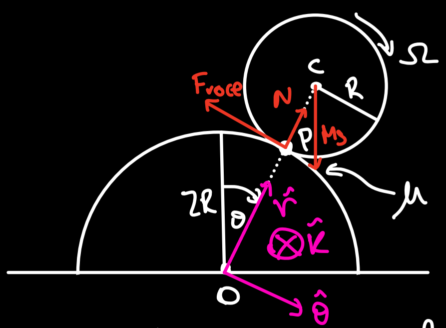
$$\ddot{x} = \frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \qquad \ddot{y} = \frac{L}{2}\left(-\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta\right)$$

Luego basta reemplazar:

$$F = \frac{mL}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \qquad N = mg - \frac{mL}{2}\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)$$

con $\ddot{\theta}$, $\dot{\theta}^2$ conocido.

P4



a) Condición de no resbalamiento:
Para un punto $\vec{P}$ cualquiera del disco su velocidad es:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_c + \vec{\Omega} \times \vec{CP}$$

Tomando $\vec{P}$ como el punto de contacto entre el disco y el semicilindro: Imponemos que no resbale con $\vec{v}_P = 0$

$$\vec{r}_c = 3R\hat{r} \Rightarrow \vec{v}_c = 3R\dot{\theta}\hat{\theta} \ ; \ \vec{\Omega} = \Omega\hat{k} \text{ (Regla mano derecha)}$$

$$\vec{CP} = -R\hat{r}$$

$$\therefore 0 = 3R\dot{\theta}\hat{\theta} + \Omega\hat{k} \times (-R\hat{r}) = 3R\dot{\theta}\hat{\theta} - R\Omega\hat{\theta}$$

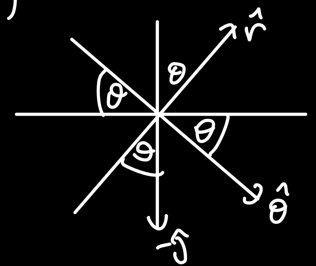
$$\Rightarrow \Omega = 3\dot{\theta}$$

b) Ec. de movimiento del centro de masa:

$$m\vec{A}_{cm} = \sum \vec{F}_{ext}$$

donde: $\vec{R}_{cm} = 3R\hat{r}$ $\quad \vec{V}_{cm} = 3R\dot{\theta}\hat{\theta}$ $\quad \vec{A}_{cm} = 3R(\ddot{\theta}\hat{\theta} - \dot{\theta}^2\hat{r})$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{roce} + \vec{N} + m\vec{g} = -F\hat{\theta} + N\hat{r} + mg\overbrace{(-\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta})}^{-\hat{j}}$$



$\hat{r}$) $-3mR\dot{\theta}^2 = N - mg\cos\theta$

$\hat{\theta}$) $3mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta - F$

Momento angular c/r al centro de masa:

$$\vec{L}_{cm} = I_{cm}\Omega\hat{k} \text{ (Rotación en un plano)}$$
$$= \frac{3mR^2}{2}\dot{\theta}\hat{k}$$

c) Sabemos que deslizará cuando se supere el roce estático, con condición de borde: $F(\theta_D) = \mu N(\theta_D)$

Para usar el mom. angular: (despejaremos N y F)

$$\vec{\tau}_{cm} = \cancel{\vec{r} \times m\vec{g}}^{\,\to 0,\ \text{actúa en el CM} \Rightarrow \vec{r}=0} + \vec{r} \times \vec{N} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= -R\hat{r} \times N\hat{r} + (-R\hat{r}) \times (-F\hat{\theta})$$

$$= RF\hat{k}$$

Como $\dot{\vec{L}}_{cm} = \vec{\tau}_{cm} \Rightarrow \frac{3mR^2}{2}\ddot{\theta} = RF$

$$\Rightarrow \boxed{F = \frac{3mR}{2}\ddot{\theta}}$$

Volviendo: (Ec. de Newton)

$$3mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta - \frac{3mR}{2}\ddot{\theta} \Rightarrow \frac{9R}{2}\ddot{\theta} = g\sin\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{2g}{9R}\sin\theta \Big/ \int_0^{\dot{\theta}}, \int_0^{\theta} \Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{2g}{9R}(-\cos\theta)\Big|_0^{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{4g}{9R}(1-\cos\theta)$$

$$\therefore F = \frac{\cancel{3}m\cancel{R}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}g}{\cancel{9}_{3}\cancel{R}}\sin\theta = \frac{mg}{3}\sin\theta$$

$$N = mg\cos\theta - \cancel{3}m\cancel{R} \cdot \frac{4g}{\cancel{9}_{3}\cancel{R}}(1-\cos\theta)$$

$$= mg\cos\theta - \frac{4mg}{3}(1-\cos\theta) = \frac{7mg}{3}\cos\theta - \frac{4mg}{3}$$

Condición: $F(\theta_D) = \mu N(\theta_D) \iff \frac{m\cancel{g}}{\cancel{3}}\sin(\theta_D) = \mu\frac{7m\cancel{g}}{\cancel{3}}\cos(\theta_D) - \frac{4m\cancel{g}}{\cancel{3}}$

$$\Rightarrow \sin(\theta_D) = \mu(7\cos(\theta_D) - 4)$$