

a) Forma 1:

$$\text{De las formulas dadas: } r(\theta) = \frac{\frac{h^2}{C} \quad (1)}{1 + \sqrt{1 + \frac{2e h^2}{C^2}} \cos \theta} = \frac{r_0(1+e) \quad (2)}{1 + e \cos \theta}$$

Es orbita con radio fijo: $r(\theta) = R, \forall \theta$

$$\text{En (2): } R = \frac{R(1+e)}{1+e \cos \theta} \Leftrightarrow \cancel{1+e \cos \theta} = \cancel{1+e} \Leftrightarrow e(\cos \theta - 1) = 0$$

Como es $\forall \theta$ se tiene que $\boxed{e=0}$

$$\text{De (1) y (2): } \frac{h^2}{C} = r_0(1+e) \quad (3) \quad e = \sqrt{1 + \frac{2e h^2}{C^2}} \quad (4)$$

$$\text{En (3): } r_0 = R, e=0 \Rightarrow \boxed{h^2 = CR} \quad (5)$$

$$(4): e=0 \Rightarrow 0 = 1 + \frac{2e h^2}{C}$$

$$\Rightarrow 0 = 1 + \frac{2e R}{C} \Rightarrow \boxed{e = -\frac{C}{2R}} \quad (6)$$

La energía potencial por unidad de masa es:

$$\frac{V}{m} = -\frac{C}{r} \quad \text{como } r=R \Rightarrow \boxed{\frac{V}{m} = -\frac{C}{R}} \quad (7)$$

$$\text{Por def.: } E = \frac{1}{2} v^2 + \frac{V}{m} \Rightarrow v^2 = 2(E - \frac{V}{m}) = 2(-\frac{C}{2R} + \frac{C}{R}) = \frac{C}{R} \quad (6), (7)$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{C}{R}}} \quad (8)$$

Forma 2: $V_{\text{ef}} = -\frac{C}{r} + \frac{h^2}{2r^2}$ como $r=R$ V_{ef} es cte.

$$\Rightarrow \frac{dV_{\text{ef}}}{dr} \Big|_R = 0$$

$$\Rightarrow + \frac{C}{r^2} - \frac{h^2}{r^3} \Big|_R = 0 \Rightarrow h^2 = CR$$

$$E = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{ef}} = -\frac{C}{R} + \frac{h^2}{2R^2} = -\frac{C}{R} + \frac{C}{2R} = -\frac{C}{2R}$$

cte.

El potencial y velocidad es igual a la forma 1.

b) Forma 1:

$$r_{\min} = r_0 = R \quad r_{\max} = r(\pi) = 4R$$

$$\hookrightarrow \text{en (2): } 4R = R \frac{1+e}{1-e} \Rightarrow e = 3/5 \text{ (9)}$$

$$\text{(9) en (3): } h^2 = CR(1+3/5) = \frac{8}{5}CR \text{ (10)}$$

$$\text{(9), (10) en (4): } \frac{3}{5} = \sqrt{1 + \frac{2e}{c^2} \frac{8}{5} CR}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{25} = 1 + \frac{16eCR}{5c^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{16}{25} = \frac{16}{5} \frac{eCR}{c^2}$$

$$\Rightarrow E = -\frac{C}{5R}, \text{ energía en órbita elíptica}$$

Para cuando $r=R$, E es la misma ^{cte.} y la velocidad es

$$V_{\text{anterior}} + \delta = V(r=R) = \sqrt{\frac{C}{R}} + \delta$$

que tenía en órbita circular

$$\text{Como } E = \frac{1}{2} (v(r=R))^2 + V(r=R) = -\frac{C}{5R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{C}{R}} + \delta \right)^2 - \frac{C}{R} = -\frac{C}{5R} \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{C}{R}} + \delta \right)^2 = \frac{8C}{5R}$$

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{8C}{5R}} - \sqrt{\frac{C}{R}}$$

La velocidad del satélite en $r=R$ en la orb. elíptica

$$V_{\text{elip}}(r=R) = \sqrt{\frac{C}{R}} + \delta$$

Forma 2: $V_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{C}{R}}$

Como en la órbita elíptica se conserva energía y momento angular:

$$h(r=R) = h(r=4R) \quad / \quad h = vr$$

$$\Rightarrow \cancel{R} V_{\text{elip}}(r=R) = \cancel{4R} V_{\text{elip}}(r=4R)$$

$$\Rightarrow V_{\text{elip}}(r=4R) = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{C}{R}} + \delta \right)$$

Conservando energía:

$$E(r=R) = E(r=4R) \Rightarrow \frac{1}{2} V_{\text{elip}}^2(r=R) + V(r=R) = \frac{1}{2} V_{\text{elip}}^2(r=4R) + V(r=4R)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{C}{R}} + \delta \right)^2 - \frac{C}{R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} \left(\sqrt{\frac{C}{R}} + \delta \right)^2 - \frac{C}{4R}$$

$$\Rightarrow \frac{15}{32} \left(\sqrt{\frac{C}{R}} + \delta \right)^2 = \frac{3C}{4R} \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{C}{R}} + \delta \right)^2 = \frac{8C}{5R} \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{8C}{5R}} - \sqrt{\frac{C}{R}}$$

c) Forma 1: Tenemos que $h^2 = \frac{8}{5} CR$

que se conserva en la órbita elíptica:

Luego $h = rv \Rightarrow$ cuando $r = r_{\text{máx}}$ se tiene que $v = v_{\text{mín}}$
 " " " " " " " " $v = v_{\text{máx}}$
 " " " " " " " " $v = v_{\text{mín}}$

$$\sqrt{\frac{8CR}{5}} = 4R v_{\text{mín}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{8C}{5R}} = R v_{\text{máx}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{8C}{5R}} = v_{\text{mín}} \\ \sqrt{\frac{8C}{5R}} = v_{\text{máx}} \end{cases}$$

Forma 2:

Tenemos que $v_{\text{elip}}(r=R) = \sqrt{\frac{C}{R}} + \delta = \sqrt{\frac{8C}{5R}} = v_{\text{máx}}$ por el arg. donde que
 $v_{\text{mín}} = R$

$$v_{\text{elip}}(r=4R) = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{C}{R}} + \delta \right) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{8C}{5R}} = v_{\text{mín}} \quad (v_{\text{máx}} = 4R)$$