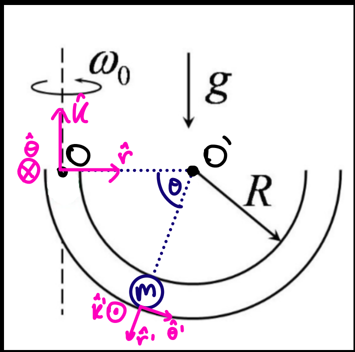


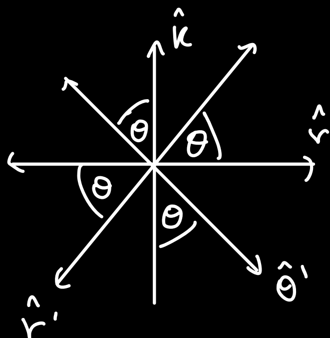

Definimos el origen del sistema no inercial en O' tq sus ejes giren con el tubo de esta manera se simplifica la cinemática:

**P1**

$\vec r' = R\hat r'$ $\quad \vec v' = R\dot\theta\hat\theta'$ $\quad \vec a' = R\ddot\theta\hat\theta' - R\dot\theta^2\hat r'$

Los ejes giran siguiendo: $\vec\Omega_e = \omega_0\hat k$ (Por regla mano derecha, los dedos rotan en $\omega_0$ y el pulgar da dirección)

donde podemos expresar $\hat k$ en terminos de $\hat r'$ y $\hat\theta'$.




$\hat k = -\sin\theta\,\hat r' - \cos\theta\,\hat\theta' \Rightarrow \vec\Omega_e = -\omega_0(\sin\theta\,\hat r' + \cos\theta\,\hat\theta')$

Luego $\vec\alpha_e = \dot{\vec\Omega}_e = 0$

Además: $\vec R_{O'} = R\hat r \Rightarrow \vec V_{O'} = R\dot\theta\,\hat\theta = R\omega_0\hat\theta$

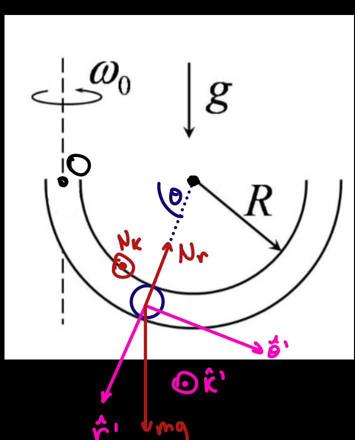
$\Rightarrow \vec A_{O'} = -R\omega_0^2\hat r$

$\hat r = -\cos\theta\,\hat r' + \sin\theta\,\hat\theta' \Rightarrow \vec A_{O'} = R\omega_0^2(\cos\theta\,\hat r' - \sin\theta\,\hat\theta')$

Una vez definido esto lo llevamos a la ec. de sist. no inercial:

$m\vec a' = \vec F^{reales} - \vec F_{mao} - \vec F_{coriolis} - \vec F_{centrifuga} - \vec F_{transversal}$

$\vec F_{reales}$ DCL:




Notar que hay 2 normales, la "nueva" es por la oposición del tubo a que la particula se salga en el plano de rotación.

$\Rightarrow \vec F_{reales} = N_k\hat k' - N_r\hat r' - mg\hat k$

$= N_k\hat k' - N_r\hat r' + mg(\sin\theta\,\hat r' + \cos\theta\,\hat\theta')$

$$\vec{F}_{mao} = -m\vec{A}_{o'} = +mR\omega_0^2(-\cos\theta\,\hat{r}' + \sin\theta\,\hat{\theta}')$$

$$\vec{F}_{coriolis} = -2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v}' = +2m(+\omega_0)[\sin\theta\,\hat{r}' + \cos\theta\,\hat{\theta}'] \times R\dot{\theta}\,\hat{\theta}'$$

$$= 2m\omega_0 R\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{k}'$$

$$\vec{F}_{centrifuga} = -m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}') = -m\vec{\Omega}_e \times \overbrace{(-\omega_0(\sin\theta\,\hat{r}' + \cos\theta\,\hat{\theta}') \times R\hat{r}')}^{\omega_0 R\cos\theta\,\hat{k}'}$$

$$= +m(+\omega_0)[\sin\theta\,\hat{r}' + \cos\theta\,\hat{\theta}'] \times \omega_0 R\cos\theta\,\hat{k}'$$

$$= m\omega_0^2 R\,[-\sin\theta\cos\theta\,\hat{\theta}' + \cos^2\theta\,\hat{r}']$$

$$\vec{F}_{transversal} = -m(\cancelto{0}{\vec{\alpha}_e} \times \vec{r}') = 0$$

Remplazando:

$\hat{r}'$) $-mR\dot{\theta}^2 = -N_r + mg\sin\theta + m\omega_0^2 R\cos^2\theta - mR\omega_0^2\cos\theta$ (1)

$\hat{\theta}'$) $mR\ddot{\theta} = mg\cos\theta - m\omega_0^2 R\sin\theta\cos\theta + mR\omega_0^2\sin\theta$ (2)

$\hat{k}'$) $0 = N_k + 2m\omega_0 R\dot{\theta}\sin\theta$ (3)

a) Velocidad absoluta:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}_{o'} + \vec{\Omega}_e \times \vec{r}'$$

$$= R\dot{\theta}\,\hat{\theta}' + R\omega_0\,\hat{\theta} + (-\omega_0)[\sin\theta\,\hat{r}' + \cos\theta\,\hat{\theta}'] \times R\hat{r}'$$

$$= R\dot{\theta}\,\hat{\theta}' + R\omega_0\,\hat{\theta} + R\omega_0\cos\theta\,\hat{k}'$$

Notamos que $\hat{\theta} = -\hat{k}'$

$$\Rightarrow \vec{v} = R\dot{\theta}\,\hat{\theta}' + R\omega_0(\cos\theta - 1)\,\hat{k}$$

Se pide $\vec{v}$ al salir del tubo $\Rightarrow \theta = \pi$

falta $\dot{\theta}(\pi)$, así que integramos (2):

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\cos\theta - w_0^2\cos\theta\sin\theta + w_0^2\sin\theta$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \left(\frac{g}{R}\cos\theta - w_0^2\cos\theta\sin\theta + w_0^2\sin\theta\right)d\theta \Big/ \int_{\dot{\theta}(0)}^{\dot{\theta}(\theta)},\ \int_{\theta=0}^{\theta}$$

$$\Rightarrow \int_{\dot{\theta}(0)}^{\dot{\theta}(\theta)} \dot{\theta}'d\dot{\theta}' = \int_0^{\theta} \frac{g}{R}\cos\theta - w_0^2\underbrace{\cos\theta\sin\theta}_{\frac{1}{2}\sin(2\theta)} + w_0^2\sin\theta$$

soltada del reposo

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2(\theta)}{2} = \left[\frac{g}{R}\sin\theta + \frac{w_0^2}{4}\cos(2\theta) - w_0^2\cos\theta\right]\Big|_0^{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2(\theta) = \frac{2g}{R}\sin\theta + \frac{w_0^2}{2}\left(\cos(2\theta)-1\right) - 2w_0^2(\cos\theta - 1)$$

$$\therefore \dot{\theta}^2(\pi) = \frac{2g}{R}\cancelto{0}{\sin(\pi)} + \cancelto{0}{\frac{w_0^2}{2}(\cos(2\pi)-1)} - 2w_0^2\overbrace{(\cos(\pi)-1)}^{-2} = 4w_0^2$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(\pi) = 2w_0$$

$$\boxed{\vec{v}(\pi) = 2Rw_0\,\hat{\theta}' - 2Rw_0\,\hat{k}'}$$

b) De (3):

$$N_k = -2mw_0\dot{\theta}R\sin\theta \Rightarrow N_k(\pi) = -2mw_0\dot{\theta}(\pi)R\cancelto{0}{\sin(\pi)} = 0$$

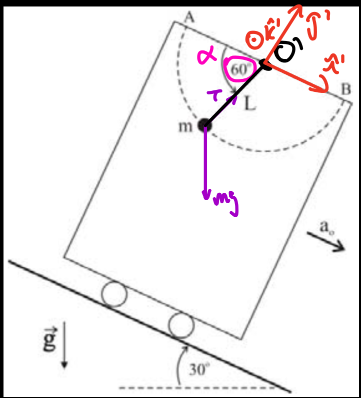
De (1):

$$\vec{N}_r = N_r\,\hat{r}'$$

$$N_r = -(mRw_0^2\cos\theta - mRw_0^2\cos^2\theta - mg\sin\theta - mR\dot{\theta}^2)$$

$$\Rightarrow N_r(\pi) = -(mRw_0^2\cancelto{-1}{\cos(\pi)} - mRw_0^2\cancelto{1}{\cos^2(\pi)} - mg\cancelto{0}{\sin(\pi)} - 4mRw_0^2) = 6mRw_0^2$$

P2 Definimos el origen del sistema no inercial tal que siga al carro, en el punto medio de $\overline{AB}$:




$\Rightarrow \vec{A}_{O'} = \vec{a}_o$

El equilibrio dado es c/r al carro, es decir la partícula tendrá $\vec{a}'=0$ (la aceleración relativa al carro es nula, no necesariamente la absoluta)

Por ende usaremos un coordenadas cartesianas y impondremos
rotadas
$\ddot{x} = \ddot{y} = 0$

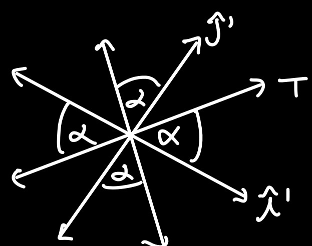
De esta manera: $\vec{A}_{O'} = a_o \hat{\imath}'$ y como los ejes no rotan $\vec{\Omega}_e = \vec{\alpha}_e = 0$

Usando la ec.:

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{reales} - \vec{F}_{mao} - \vec{F}_{coriolis} - \vec{F}_{centrifuga} - \vec{F}_{trans}$$

Se tiene que: $\vec{a}' = \ddot{x}\,\hat{\imath}' + \ddot{y}\,\hat{\jmath}'$

$\vec{F}_{reales} = m\vec{g} + \vec{T}$

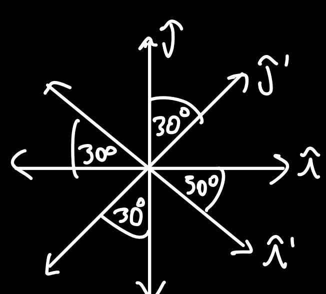



Descomponer $\vec{T}$ es como siempre:

$\vec{T} = (\cos\alpha\,\hat{\imath}' + \sin\alpha\,\hat{\jmath}')T$

Pero la gravedad:

$m\vec{g} = -mg\,\hat{\jmath}$ (donde $\hat{\jmath}$ apunta arriba $\Rightarrow$ queremos $\hat{\jmath}$ en términos de $\hat{\jmath}'$ y $\hat{\imath}'$)




$\hat{\jmath} = \cos 30°\,\hat{\jmath}' - \sin 30°\,\hat{\imath}' = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}' - \frac{1}{2}\hat{\imath}'$

$\Rightarrow m\vec{g} = mg\left(\frac{1}{2}\hat{\imath}' - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}\right)$

Siguiendo: $\vec{F}_{mao} = -m\vec{A}_o = -ma_o\hat{\imath}$

$\vec{F}_{coriolis} = -2m \cancelto{0}{\vec{\Omega}_e} \times \vec{v}'$ $\quad$ $\vec{F}_{centrifuga} = -m \cancelto{0}{\vec{\Omega}_e} \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}')$ $\quad$ $\vec{F}_{trans} = -m \cancelto{0}{\dot{\vec{\Omega}}_e} \times \vec{r}'$

$$\therefore\ m\ddot{x}\hat{\imath}' + m\ddot{y}\hat{\jmath}' = -m\vec{a}_0\hat{\imath}' + T(\cos\alpha\,\hat{\imath}' + \sin\alpha\,\hat{\jmath}') + mg\left(\frac{1}{2}\hat{\imath}' - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}'\right)$$

$\hat{\imath}')\quad m\ddot{x} = -ma_0 + T\cos\alpha + \frac{mg}{2} \quad (1)$

$\hat{\jmath}')\quad m\ddot{y} = T\sin\alpha - mg\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$

Reposo relativo ($\ddot{x} = \ddot{y} = 0$) en el eq. ($\alpha = 60°$):

$\Rightarrow 0 = -ma_0 + \frac{T}{2} + \frac{mg}{2}$ $\quad \Rightarrow \boxed{T = mg;\ a_0 = g}$

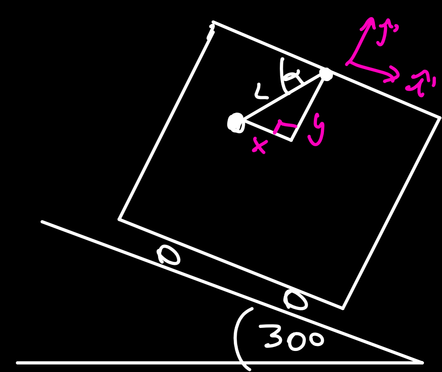
siempre

$0 = T\frac{\sqrt{3}}{2} - mg\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ solo en aquel instante

Para la frec. de pequeñas oscilaciones:

$\Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{mg}{2} + T\cos\alpha$

$m\ddot{y} = T\sin\alpha - mg\frac{\sqrt{3}}{2}$




Luego $\quad x = -L\cos\alpha \qquad y = -L\sin\alpha$

$\Rightarrow \dot{x} = L\dot{\alpha}\sin\alpha \qquad \dot{y} = -L\dot{\alpha}\cos\alpha$

$\Rightarrow \ddot{x} = L\ddot{\alpha}\sin\alpha + L\dot{\alpha}^2\cos\alpha \qquad \ddot{y} = -L\ddot{\alpha}\cos\alpha + L\dot{\alpha}^2\sin\alpha$

$\Rightarrow mL(\ddot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\alpha}^2\cos\alpha) = -\frac{mg}{2} + T\cos\alpha \quad /\cdot \sin\alpha$

$mL(-\ddot{\alpha}\cos\alpha + \dot{\alpha}^2\sin\alpha) = T\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}mg \quad /\cdot -\cos\alpha$

$$\left.\begin{aligned}
&\Rightarrow mL\sin\alpha(\ddot{\alpha}\sin\alpha + \cancel{\dot{\alpha}^2\cos\alpha}) = -\frac{mg}{2}\sin\alpha + \cancel{T\cos\alpha\sin\alpha} \\
&mL\cos\alpha(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \cancel{\dot{\alpha}^2\sin\alpha}) = \cancel{-T\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2}mg\cos\alpha
\end{aligned}\right\}\ \text{Sumando}$$

$$\Rightarrow ml\ddot{\alpha} = -\frac{mg}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}mg\cos\alpha$$

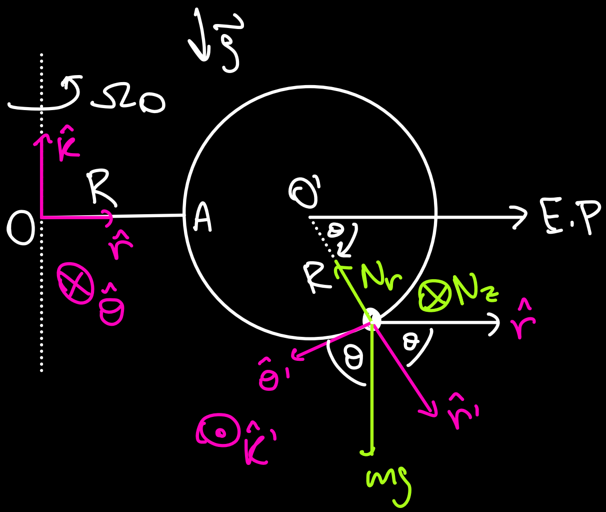
$$\Rightarrow \ddot{\alpha} = \frac{g}{l}\left(-\frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right) = -\frac{dV_*}{d\alpha}\ (\text{pot. efectivo})$$

$$\Rightarrow +\frac{d^2V_*}{d\alpha^2} = \frac{g}{l}\left(+\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$$

Como $\alpha = 60^\circ$ : $\left(w_0^2 = \left.\frac{d^2V_*}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=60^\circ}\right)$

$$\Rightarrow \left.\frac{d^2V_*}{d\alpha^2}\right|_{60^\circ} = \frac{g}{l}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{g}{l} = w_0^2$$

$\boxed{\text{P3}}$




Se nos da el origen del sistema no inercial, debemos encontrar $\vec{A}_{O'}$, $\vec{\Omega}_e$, $\vec{\alpha}_e$.

$$\vec{R}_{O'} = 2R\hat{r} \Rightarrow \vec{V}_{O'} = 2R\dot{\theta}\hat{\theta} = 2R\Omega_0\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{A}_{O'} = -2R\Omega_0^2\hat{r} \quad (\text{MCU radio } 2R)$$

$$\vec{\Omega}_e = \Omega_0\hat{k} \Rightarrow \vec{\alpha}_e = 0$$

Cinemática:

$$\vec{r}\,' = R\hat{r}' \qquad \vec{v}\,' = R\dot{\theta}\hat{\theta}' \qquad \vec{a} = R(\ddot{\theta}\hat{\theta}' - \dot{\theta}^2\hat{r}')$$

$\vec{\alpha}_e = 0$

Newton no inercial: $m\vec{a}\,' = \vec{F}_{reales} + \vec{F}_{mao} + \vec{F}_{coriolis} + \vec{F}_{centrifuga} + \cancel{\vec{F}_{transversal}}$ $0$

$$\vec{F}_{Reales} = m\vec{g} + \vec{N} = mg\overbrace{(\sin\theta\,\hat{r}' + \cos\theta\,\hat{\theta}')}^{-\hat{k}} + N_r\hat{r}' - N_z\hat{k}'$$

por rotación $\hat{k}'$

El signo no importa en realidad, se puede dejar arbitrario

$$\vec{F}_{mao} = -m\vec{A}_0 = 2mR\Omega_0^2\hat{r} = 2mR\Omega_0^2(\cos\theta\,\hat{r}' - \sin\theta\,\hat{\theta}')$$

$$\vec{F}_{centrifuga} = -m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}\,')$$

$$\vec{\Omega}_e \times \vec{r}\,' = -\Omega_0(\sin\theta\,\hat{r}' + \cos\theta\,\hat{\theta}') \times R\hat{r}' = +\Omega_0 R\cos\theta\,\hat{k}'$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{centrifuga} = m\Omega_0(\sin\theta\,\hat{r}' + \cos\theta\,\hat{\theta}') \times \Omega_0 R\cos\theta\,\hat{k}'$$

$$= m\Omega_0^2 R(-\sin\theta\cos\theta\,\hat{\theta}' + \cos^2\theta\,\hat{r}')$$

$$\vec{F}_{coriolis} = -2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v}\,' = 2m\Omega_0(\sin\theta\,\hat{r}' + \cos\theta\,\hat{\theta}') \times R\dot{\theta}\hat{\theta}'$$

$$= 2mR\Omega_0\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{k}'$$

Reemplazando:

$\hat{r}'$) $-mR\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta + 2mR\Omega_0^2\cos\theta + m\Omega_0^2R\cos^2\theta$ (1)

$\hat{\theta}'$) $mR\ddot{\theta} = mg\cos\theta - 2mR\Omega_0^2\sin\theta - m\Omega_0^2R\cos\theta\sin\theta$ (2)

$\hat{k}'$) $0 = -N_z + 2mR\Omega_0\dot{\theta}\sin\theta$ (3)

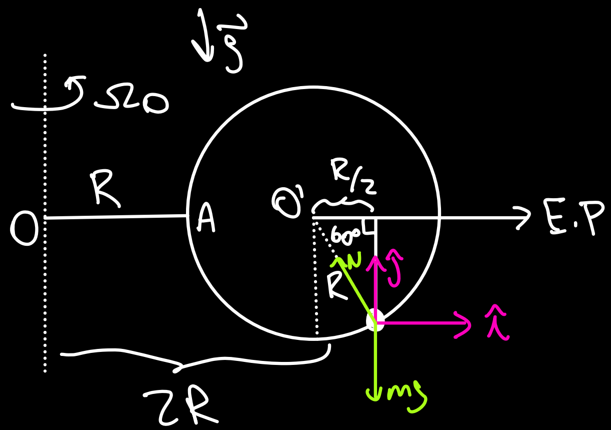
a) $\theta = 60°$ eq. si $\ddot{\theta}\big|_{60°} = 0$

De (2): $0 = mg\cos(60°) - 2mR\,\Omega_0^2\sin(60°) - m\,\Omega_0^2 R\cos(60°)\sin(60°)$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}g - \sqrt{3}\,mR\,\Omega_0^2 - m\,\Omega_0^2 R\,\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow g/2 = \frac{5\sqrt{3}}{4}mR\,\Omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\Omega_0^2 = \frac{2g}{5\sqrt{3}R}}$$

Alternativo: Como $\theta = 60°$ es eq. si la argolla esta en $\theta = 60°$ y el aro rota es un MCU de radio $\frac{5R}{2}$ y rota con velocidad angular $\Omega_0$.




$$\vec{N} = N(\cos 30°\,\hat{j} - \sin 30°\,\hat{\imath})$$

$\hat{\imath}$) $-m\frac{5R}{2}\Omega_0^2 = -\frac{N}{2}$

$\hat{j}$) $0 = -mg + \frac{\sqrt{3}}{2}N$

$$\Rightarrow N = \frac{2mg}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cancel{m}\frac{5R}{2}\Omega_0^2 = \frac{\cancel{m}g}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\Omega_0^2 = \frac{2}{5\sqrt{3}}\frac{g}{R}}$$

b) Ya se hizo. ($\vec{F}_i \cdot \hat{\theta}$ con las fzas. encontradas)

↳ fuerzas reales y no inerciales.

c) De (2):

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\cos\theta - 2\Omega_0^2\sin\theta - \Omega_0^2\cos\theta\sin\theta = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \left(\frac{g}{R}\cos\theta - 2\Omega_0^2\sin\theta - \Omega_0^2\cos\theta\sin\theta\right)d\theta \Big/ \int_{w_0}^{\dot{\theta}(\theta)} , \int_{60°}^{\theta}$$

$$\Rightarrow \int_{\omega_0}^{\dot\theta(\theta)} \dot\theta \, d\dot\theta = \int_{60^\circ}^{\theta} \frac{g}{R}\cos\theta - 2\Omega_0^2 \sin\theta - \frac{\Omega_0^2}{2}\sin 2\theta \, d\theta$$

$$\Rightarrow \left(\dot\theta^2 - \omega_0^2\right)\frac{1}{2} = \left[\frac{g}{R}\sin\theta + 2\Omega_0^2\cos\theta + \frac{\Omega_0^2}{4}\cos(2\theta)\right]_{60^\circ}^{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot\theta = \left[\omega_0^2 + 2\left[\frac{g}{R}\left(\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\Omega_0^2\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right) + \frac{\Omega_0^2}{4}\left(\cos 2\theta + \frac{1}{2}\right)\right]\right]^{1/2}$$