

P2 del CZ-2014-1

$$V(x) = C(4D^2x^2 - x^4), \quad C \in \mathbb{R}$$

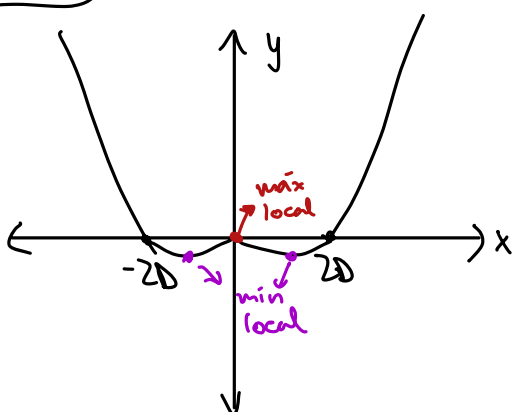
a) El potencial es un polinomio grado 4 $\Rightarrow$ tiene forma de parábola:

$$V(x) = Cx^2(4D^2 - x^2) = Cx^2(2D - x)(2D + x)$$

Se tienen raíces en $x=0, 2D, -2D$

Asumiendo D positivo:

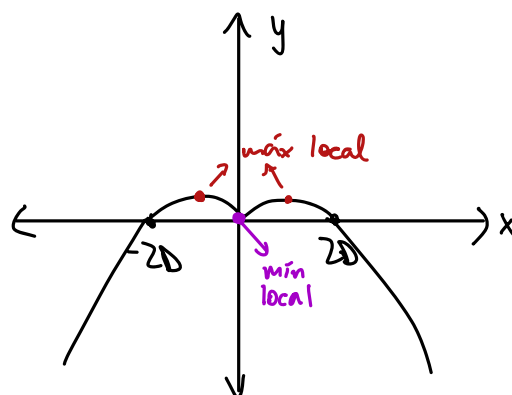
$C < 0$



• E.I

• E.E

$C > 0$



Se esperan 3 pts. de eq.:

$$V'(x) = C(8D^2x - 4x^3) = Cx(8D^2 - 4x^2) = Cx(2\sqrt{2}D - 2x)(2\sqrt{2}D + 2x)$$

$$\Rightarrow x_{eq,1} = 0 \quad x_{eq,2} = \sqrt{2}D \quad x_{eq,3} = -\sqrt{2}D$$

$$V''(x) = C(8D^2 - 12x^2)$$

$$\underline{x_{eq,1}} \quad V''(x_{eq,1}) = 8CD^2 \begin{cases} > 0, \text{ si } C > 0 \Rightarrow \text{estable} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{8CD^2}{m} \text{ (mínimo)} \\ < 0, \text{ si } C < 0 \Rightarrow \text{inestable} \text{ (máximo)} \end{cases}$$

$$\underline{x_{eq,2}} \quad V''(x_{eq,2}) = -16CD^2 \begin{cases} > 0, \text{ si } C < 0 \Rightarrow \text{estable} \Rightarrow \omega_0^2 = -\frac{16CD^2}{m} \\ < 0, \text{ si } C > 0 \Rightarrow \text{inestable} \end{cases}$$

$$\underline{x_{eq,3}} \quad V''(x_{eq,3}) =$$

OJO: Los resultados coinciden con lo esperado por el gráfico

OJO:
 $K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ pues
 se mueve solo en
 el eje $x \Rightarrow \alpha = m$
 para $\omega_0^2 = \frac{V''(x)}{\alpha}$

b) $C > 0 \Rightarrow x=0$ es E.E.

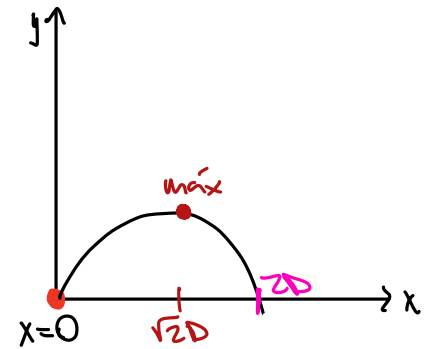
Nos encontramos en un "pozo" o "hoyo", para salir de este, mirando el gráfico, intuitivamente es necesario sobrepasar el umbral en $x=\sqrt{2}D$

Partiendo de $x=0$ para llegar a $x=2D$, es necesario que para pasar por $x=$ tengamos por lo menos el potencial $V(\sqrt{2}D)$.

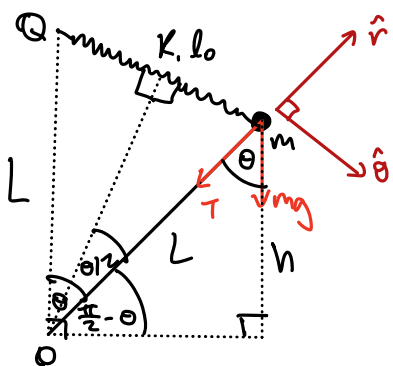
Por ende si partimos con $V(0)=0$ y necesitamos tener un potencial de $V(\sqrt{2}D) = C(4D^2 \cdot 2D^2 - D^4) = 7CD^4 > 0$,

como la energía es solo cinética o potencial se expresa como

$$K(0) + \cancel{V(0)}^0 \geq V(\sqrt{2}D) \Leftrightarrow K_i \geq C(4D^2 \cdot 2D^2 - 4D^4) \Leftrightarrow \boxed{K_i \geq 4D^4 C}$$



P2 del C2-2007-2



$$\begin{aligned} \text{a) } EMT &= K + V_{mg} + V_{resorte} \\ &= \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 + mg(\text{altura}) + \frac{1}{2} K (l - l_0)^2 \end{aligned}$$

Donde: Usando polares (rotación)

$$\vec{r} = L \hat{r} \Rightarrow \vec{v} = L \dot{\theta} \hat{\theta} \Rightarrow \|\vec{v}\| = L \dot{\theta}$$

Para la altura es directo: $h = L \cos \theta$

mientras que para la extensión del resorte usamos que es Δ isósceles

$\Rightarrow$ se divide en 2 Δ rectángulos: $l = 2L \sin(\theta/2)$

$$\infty EMT = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + \underbrace{mgL \cos \theta + \frac{1}{2} K (2L \sin(\theta/2) - l_0)^2}_{V(\theta)}$$

$$\text{b) } \theta = \pi/3 \quad E.E \Leftrightarrow V'(\pi/3) = 0 \quad \wedge \quad V''(\pi/3) > 0$$

Imponiéndolo:

$$\begin{aligned} V'(\theta) &= -mgL \sin \theta + \cancel{\frac{1}{2}} \cdot K \cdot \cancel{2} (2L \sin(\theta/2) - l_0) (\cancel{2} L \cos(\theta/2) \cancel{1/2}) \\ &= -mgL \sin \theta + KL \cos(\theta/2) (2L \sin(\theta/2) - l_0) \end{aligned}$$

$$V'(\pi/3) = 0 \Leftrightarrow -mgL \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + K \cancel{L} \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} (\cancel{2} L \cancel{\frac{1}{2}} - l_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m = \frac{K}{g} (L - l_0)} \quad (*)$$

$$V''(\theta) = -mgL \cos \theta - \frac{1}{2} KL \sin \theta (2L \sin(\theta/2) - l_0) + KL^2 \cos^2(\theta/2)$$

$$V''(\pi/3) = -\frac{1}{2} mgL - \frac{1}{4} KL (\cancel{2} L \cancel{\frac{1}{2}} - l_0) + KL^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{2} mgL - \frac{1}{4} KL^2 + \frac{1}{4} K l_0 + \frac{3}{4} KL^2$$

$$(*) = -\cancel{\frac{1}{2}} KL^2 + \frac{1}{2} KL l_0 - \cancel{\frac{1}{4}} KL^2 + \frac{1}{4} KL l_0 + \cancel{\frac{3}{4}} KL^2$$

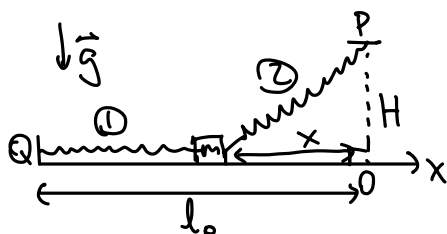
$$= \frac{3}{4} KL l_0 > 0 \quad \infty \text{ Se verifican ambos con } (*)$$

c) sabemos: $\omega_0^2 = \frac{V''(\pi/3)}{2}$, donde α acompaña a la var. cinemática en la energía cinética, como $K = \frac{1}{2} \boxed{mL^2} \dot{\theta}^2 = \alpha$

$$y \quad V''(\frac{1}{3}) = \frac{3}{4} KL l_0 = \frac{3}{8} KL^2 \quad \text{si} \quad L = 2l_0$$

$$\omega_0^2 = \frac{3K\cancel{L^2}}{8} \cdot \frac{1}{m\cancel{L^2}} = \frac{3K}{8m}$$

P2 del C2-2012-2



a) Dado que la altura es cte., el potencial del sistema conservativo es:

$$V(x) = V_{\text{resorte},1} + V_{\text{resorte},2} = \frac{1}{2} K(l_1 - l_0)^2 + \frac{1}{2} K(l_2 - l_0)^2$$

donde l_2 sale del triangulo rectangulo:

$$l^2 = \sqrt{x^2 + H^2} \text{ y la otra es directo } l_1 = l_0 - x$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{2} K(\cancel{l_0} - x - \cancel{l_0})^2 + \frac{1}{2} K(\sqrt{x^2 + H^2} - l_0)^2$$

$$= \frac{1}{2} Kx^2 + \frac{1}{2} K(\sqrt{x^2 + H^2} - l_0)^2$$

Equilibrios: $V'(x_{eq}) = 0$

$$V'(x) = Kx + K(\sqrt{x^2 + H^2} - l_0) \frac{x}{\sqrt{x^2 + H^2}} = Kx + Kx \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + H^2}}\right)$$

$$= Kx \left[1 + 1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + H^2}}\right] = Kx \left[2 - l_0(x^2 + H^2)^{-1/2}\right]$$

$$V'(x_{eq}) = 0 \Leftrightarrow x_{eq} = 0 \vee \sqrt{x_{eq}^2 + H^2} = \frac{l_0}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_{eq} = 0 \vee x_{eq}^2 = \frac{l_0^2}{4} - H^2$$

$$\Leftrightarrow x_{eq} = 0 \vee x_{eq} = \sqrt{\frac{l_0^2}{4} - H^2} \vee x_{eq} = -\sqrt{\frac{l_0^2}{4} - H^2}$$

$> 0 \Rightarrow \text{cond. } \exists$

$$\Leftrightarrow l_0^2 > 4H^2$$

$$\Leftrightarrow l_0 > 2H$$

Estabilidad: E.E $\Leftrightarrow V''(x_{eq}) > 0$

$$V''(x) = K \left[2 - l_0(x^2 + H^2)^{-1/2}\right] + Kx \frac{1}{2} l_0(x^2 + H^2)^{-3/2} 2x$$

$$= K \left[2 - l_0(x^2 + H^2)^{-1/2} + x^2 l_0(x^2 + H^2)^{-3/2}\right]$$

$$V''(0) = K \left[2 - l_0(H^2)^{-1/2}\right] = K \left[2 - \frac{l_0}{H}\right] \begin{cases} > 0 \text{ si } 2 > \frac{l_0}{H} \Rightarrow \text{estable} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{K}{m} \left[2 - \frac{l_0}{H}\right] \\ < 0 \text{ si } 2 < \frac{l_0}{H} \Rightarrow \text{inestable} \end{cases}$$

$$V''\left(\pm \sqrt{\frac{l_0^2}{4} - H^2}\right) = K \left[2 - l_0 \left(\frac{l_0^2}{4} - H^2 + H^2\right)^{-1/2} + \left(\frac{l_0^2}{4} - H^2\right) l_0 \left(\frac{l_0^2}{4} - H^2 + H^2\right)^{-3/2}\right]$$

$$= K \left[2 - \cancel{l_0} \frac{2}{\cancel{l_0}} + \left(\frac{l_0^2}{4} - H^2\right) \cancel{l_0} \frac{8}{\cancel{l_0}^3}\right]$$

$$= K \left[\cancel{L} - \cancel{L} + \frac{\cancel{l_0^2} \cancel{g^2}}{\cancel{4} \cancel{l_0^2}} - \frac{H^2}{l_0^2} \right]$$

$$= K \left[L - \frac{H^2}{l_0^2} \right] = 2K \left[1 - \frac{4H^2}{l_0^2} \right] \begin{cases} > 0 \text{ si } \frac{l_0^2}{4} > H^2 \Rightarrow \text{estable} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{2K}{m} \left[1 - \frac{4H^2}{l_0^2} \right] \\ < 0 \text{ si } \frac{l_0^2}{4} < H^2 \Rightarrow \text{inestable} \end{cases}$$

pues $H < l_0/2$

b) $H = l_0/4$. $x=0$ es E.I., si le damos una perturbación a la derecha es un simple aporte de energía para que empiece a moverse. La máxima rapidez será tq se transforme la mayor cantidad de potencial posible en cinética. Como $x=0$ es máximo de potencial, tendrá el menor potencial en su mínimo (sig. E.E.) donde la cinética será máx ($\Rightarrow v_{\text{máx}}$)

$$\hookrightarrow x = \sqrt{\frac{l_0^2}{4} - H^2}$$

Es decir: $K(x=0) + V(x=0) = K_{\text{final}} + V_{\text{final}} = V(\sqrt{\frac{l_0^2}{4} - H^2})$
 $\downarrow$ 0, parte con $v=0$, pues es despreciable al ser una pequeña perturbación

$$\Rightarrow \frac{1}{2} K (H - l_0)^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K \left[\left(\frac{l_0^2}{4} - \cancel{H^2} + \cancel{H^2} \right)^{1/2} - l_0 \right]^2 + \frac{1}{2} K \left(\frac{l_0^2}{4} - H^2 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} K \left(\frac{l_0}{4} - l_0 \right)^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K \left[\frac{l_0}{2} - l_0 \right]^2 + \frac{1}{2} K \left(\frac{3l_0^2}{16} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{K}{m} \cdot \frac{9}{16} l_0^2 = v^2 + \frac{\frac{K}{m} \frac{l_0^2}{4} + \frac{K}{m} \frac{3l_0^2}{16}}{\frac{7Kl_0^2}{16m}} \Rightarrow \boxed{v^2 = \frac{K}{m} \frac{2}{16} l_0^2 = \frac{Kl_0^2}{8m}}$$

Por otro lado, dado que se pide la ext. máx del resorte horizontal será el $x_{\text{máx}}$ dado que pasado 0 ($x=0$) a la derecha el resorte se extiende, como queremos máx extensión podemos esperar que todo será energía potencial y la velocidad será nula ($K=0$), pues más potencial viene de mayor extensión.

$$V(0) = V(x_{\text{máx}}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} K (H - l_0)^2 = \frac{1}{2} K \left(\sqrt{x_{\text{máx}}^2 + H^2} - l_0 \right)^2 + \frac{1}{2} K x_{\text{máx}}^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{l_0}{4} - l_0 \right)^2 = (x_{\text{máx}}^2 + H^2 - 2l_0 \sqrt{x_{\text{máx}}^2 + H^2} + l_0^2) + x_{\text{máx}}^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{89}{16} l_0^2 = 2x_{\text{máx}}^2 + \frac{l_0^2}{16} - 2l_0 \sqrt{x_{\text{máx}}^2 + H^2} + l_0^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2x_{\max}^2 + \frac{l_0^2}{2} - 2l_0\sqrt{x_{\max}^2 + H^2}$$

$$\Leftrightarrow 0 = x_{\max}^2 - \sqrt{x_{\max}^2 + H^2} l_0 + \frac{l_0^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow x_{\max}^2 + \frac{l_0^2}{4} = l_0\sqrt{x_{\max}^2 + l_0^2/16} \quad / (\cdot)^2$$

$$\Leftrightarrow x_{\max}^4 + 2x_{\max}^2 \frac{l_0^2}{4} + \frac{l_0^4}{16} = l_0^2 (x_{\max}^2 + l_0^2/16)$$

$$\Leftrightarrow x_{\max}^2 = \frac{l_0^2}{2} \quad \Leftrightarrow x_{\max} = \frac{l_0}{\sqrt{2}} \quad (x_{\max} > 0)$$

$$\boxed{l_{\max} = l_0 + \frac{l_0}{\sqrt{2}}}$$